

Prova No. 1

Cálculo Vetorial e Aplicações (MAP 215)
Cálculo Diferencial e Integral III (MAT 205)

1. Prove que para campos escalares φ , ψ e campos vetoriais \mathbf{A} , \mathbf{B} definidos e de classe C^1 (ou pelo menos diferenciáveis) sobre um aberto U qualquer de \mathbb{R}^n , valem as seguintes versões da regra do produto:

Para n geral:

$$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi) , \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{A}) , \quad (2)$$

Para $n = 3$:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) , \quad (3)$$

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{A} + \varphi(\nabla \times \mathbf{A}) , \quad (4)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} . \quad (5)$$

(O último item, eq. (5), é opcional.)

Prove também que para campos escalares φ e campos vetoriais \mathbf{A} definidos e de classe C^2 sobre um aberto U qualquer de \mathbb{R}^3 , vale

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0 . \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 . \quad (7)$$

2. Em $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, considere o campo escalar φ de classe C^∞ definido por

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^k} \quad (8)$$

onde

$$\mathbf{r} = (x, y, z) , \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} .$$

Calcule seu gradiente $\nabla\varphi$.

3. Em $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, considere o campo vetorial \mathbf{E} de classe C^∞ definido por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^l} \quad (9)$$

onde

$$\mathbf{r} = (x, y, z) , \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{e} \quad l \in \mathbb{N} .$$

Calcule sua divergência $\nabla \cdot \mathbf{E}$ e seu rotacional $\nabla \times \mathbf{E}$. (Observe o resultado do problema anterior.) O que acontece quando $l = 3$?