

Nome: Cristiana de Siqueira Silva SantosNºUSP: 6440364

Q	N
1	2,5
2	2,5
3	2,5
4	2,5
Total	10 10

Questão 1. (2,5 pontos) Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências (a_n) . Em caso afirmativo, calcule o limite.

(i) $a_n = \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{2n}$

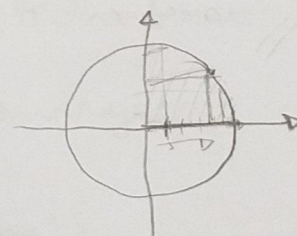
(ii) $a_n = n^2 \sin \frac{3}{n^2}$

i) $a_n = \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{2n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e < 2$
 série crescente limitada superiormente $\Rightarrow$ série converge //

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{-3} = e^2$ //

ii) $a_n = n^2 \sin \frac{3}{n^2} \leq n^2 \cdot \frac{3}{n^2} = 3$
 série crescente (quadrado) limitada superiormente $\Rightarrow$ série converge //

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sin \frac{3}{n^2} = 3$ //



Questão 2. (2,5 pontos) Verifique se a série é convergente ou divergente:

(i) $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n! 5^n}$

(ii) $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{3n(\ln n)^p}, p > 0$

i) $a_n = \frac{n^n}{n! 5^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! 5^{n+1}} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot n! \cdot 5^n \cdot 5}$

Critério da razão:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{n! 5^n \cdot 5} \cdot \frac{n! 5^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{5} = \frac{e}{5} < 1$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n$ converge //

ii) $a_n = \frac{1}{3n(\ln n)^p}$, contínuo,

Critério da integral:

$$\int_3^{\infty} a_n = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_3^C a_n = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_3^C \frac{1}{3x(\ln x)^p} dx$$

troca de variável:

$$y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_3^C \frac{1}{3y^p} dy = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{y^{1-p}}{1-p} \Big|_3^C = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(\ln x)^{1-p}}{(1-p)} \Big|_3^C =$$

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{(\ln C)^{1-p}}{(1-p)} - \frac{(\ln 3)^{1-p}}{(1-p)} \right) = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(1-p)} \left((\ln C)^{1-p} - (\ln 3)^{1-p} \right)$$

Se $p > 1$: $\lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(1-p)} \left(\frac{1}{\ln C^{1-p}} - \frac{1}{\ln 3^{1-p}} \right) \Rightarrow$ converge //

Se $p \leq 1$: $\lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(1-p)} \left(\ln C^{1-p} - (\ln 3)^{1-p} \right) \Rightarrow$ diverge //

Questão 3. (2,5 pontos) Decida se a série é condicional ou absolutamente convergente:

$$(i) \sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$$

$$(ii) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-1}$$

$$i) \sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2} = \sum_{n \geq 3} (-1)^n \cdot a_n \Rightarrow \text{série é alternada}$$

$$\bullet a_n \text{ é decrescente pois } \left(\frac{\ln n}{n^2} \right)' = \frac{\frac{1}{n} \cdot n^2 - \ln n \cdot 2n}{(n^2)^2} = \frac{n - 2n \ln n}{n^4} < 0$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = 0$$

Pelo critério de Leibniz, a série converge

Analisando o módulo:

$$\left| \sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2} \right| = \sum_{n \geq 3} \frac{\ln n}{n^2}$$

Critério do integral:

$$\int_3^{\infty} \ln x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_3^c \ln x \cdot \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \begin{matrix} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \Rightarrow \lim_{c \rightarrow \infty} \int_3^c y \cdot e^{-y} dy$$

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} y \cdot e^{-y} - \int_3^c e^{-y} dy = \lim_{c \rightarrow \infty} -y \cdot e^{-y} + \int_3^c e^{-y} dy =$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \cdot \ln x + (-e^{-y}) \Big|_3^c = \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \cdot \ln x - e^{-c} + e^{-3} \Rightarrow \text{converge}$$

$\therefore$ A série converge absolutamente //

(ii) no verso

ii) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-1} \Rightarrow$ série alternada c/ $a_n = \frac{1}{4n-1}$

• Analisando módulos:

$$\left| \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-1} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n-1}$$

Por comparação: $\frac{1}{4n-1} \geq \frac{1}{4n}$ Como $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n}$ diverge, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n-1}$ também diverge

$\therefore$ a série não converge em módulo

• Analisando critério de Leibniz:

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n-1} = 0$

• $a_n = \frac{1}{4n-1}$ é decrescente p/ $n \geq 1$ pois $(a_n)' = \frac{-4}{(4n-1)^2} < 0$

} série converge

$\therefore$ série converge condicionalmente //

Questão 4. (2,5 pontos) Considere a sequência (f_n) de funções dada por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{4+x^n}, \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

(i) Determine $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

(ii) Prove que a convergência não é uniforme em $[0, +\infty[$.

(iii) Verifique que a convergência é uniforme em $[0, a]$, com $0 < a < 1$.

$$i) f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{4+x^n} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{5}, & \text{se } x = 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{e^{n \ln x}}{4 + e^{n \ln x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{e^{n \ln x}}{e^{n \ln x}} = 1$$

$$ii) \begin{cases} f_n(x) \text{ contínua} \\ f(x) \text{ não contínua} \\ f_n \not\rightarrow f(x) \end{cases} \Rightarrow f_n(x) \text{ não converge uniformemente para } f(x) //$$

$$iii) \text{ Para } 0 < x < 1, \text{ temos que } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{4+x^n} = 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{4+x^n} - 0 \right| = \frac{x^n}{4+x^n} \leq \frac{x^n}{4}$$

$\rightarrow$ seq. que não depende de x
 $\rightarrow$ decrescente

$$\text{e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{4} = 0$$

$$\therefore f_n(x) \xrightarrow{n} f(x), \quad x \in [0, a], \quad 0 < a < 1 //$$