

CATALOG



MAT-0222 — Álgebra Linear II — IME-USP

Primeira Prova — 23/04/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido usar celular durante o exame.**
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 10h30min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!

Teste 1 [func1] Considere as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$:

- a) $f(x, y, z) = 2x - y$;
- b) $f(x, y, z) = xy + z$;
- c) $f(x, y, z) = x + z - 1$;
- d) $f(x, y, z) = x + z^2$.

Quando f é um funcional linear? Assinale a alternativa correta:

☒ apenas a)

☐ a) e c)

☐ a) e d)

☐ apenas c)

☐ b) e c)

Teste 2 [func2] Considere as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$:

- a) $f(x, y, z) = 2x - y + 1$;
- b) $f(x, y, z) = y - 2z$;
- c) $f(x, y, z) = x + yz$;
- d) $f(x, y, z) = x - 2y + z$.

Quando f é um funcional linear? Assinale a alternativa correta:

☒ b) e d)

☐ apenas b)

☐ a) e d)

☐ apenas d)

☐ b) e c)

Teste 3 [dual1] Seja $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e sejam $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ definidos por

$$f_1(p) = \int_0^1 p(t)dt, \quad f_2(p) = p'(0), \quad f_3(p) = p(1).$$

Seja $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ uma basa de V tal que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma basa dual para $\mathcal{B}$;

Considere as afirmações abaixo e assinale a alternativa correta:

- a) $p_1'(0) + p_3(1) = 1$;
- b) $p_2 = x^2$;
- c) $p_2 + p_3 = 2$;
- d) $p_1(1) = 1$.

☒ apenas a)

☐ a) e c)

☐ b) e d)

☐ apenas d)

☐ b) e d)

Teste 4 [dual12] Seja $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e sejam $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ definidos por

$$f_1(p) = \int_{-1}^1 p(t)dt, \quad f_2(p) = p(-1), \quad f_3(p) = p'(1).$$

Seja $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ uma base de V tal que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base dual para $\mathcal{B}$; Considere as afirmações abaixo e assinale a alternativa correta:

- a) $p_1 + p_3 = -1$;
- b) $p_2 = x + 1$;
- c) $p_2(-1) + p_3'(1) = 2$;
- d) $p_1'(1) = 1$.

☒ apenas c)

☐ a) e c)

☐ a) e b)

☐ b) e d)

☐ apenas d)

Teste 5 [transposta1] Sejam $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{L}(V)$ o operador de derivação e $D^t \in \mathcal{L}(V)$ a transformação transposta de D . Seja $f \in V^*$, $f(p) = p(1) + p'(0)$.

Considere as afirmações abaixo e assinale a alternativa correta:

- a) $D^t(f)(x^2 + 1) = 1$;
- b) $D^t(f)(x^2 - x + 1) = 3$;
- c) $D^t(f)(x^4) = 4$
- d) $D^t(f)(x) = 0$.

☒ b) e c)

☐ a) e c)

☐ b) e d)

☐ apenas c)

☐ apenas b)

Teste 6 [transposta2] Sejam $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{L}(V)$ o operador de derivação e $D^t \in \mathcal{L}(V)$ a transformação transposta de D . Consideremos $f \in V^*$, $f(p) = p(0) + p'(1)$.

Considere as afirmações abaixo e assinale a alternativa correta:

- a) $D^t(f)(x^2 + 1) = 2$;
- b) $D^t(f)(x^2 - x + 1) = 3$;
- c) $D^t(f)(x^4) = 4$
- d) $D^t(f)(x) = 1$.

☒ a) e d)

☐ a) e c)

☐ apenas a)

☐ b) e d)

☐ apenas d)

Teste 7 [diagonal11] Sejam V um espaço linear, $\dim V = 4$, e $T \in \mathcal{L}(V)$, com polinômio caraterístico $p_T(x) = x^2(x-1)^2$.

Denote por $\mathcal{E}$ o operador identidade de V . Temos que T é diagonalizável se e somente se

- a) o polinômio minimal $m_T(x) = x(x-1)$;
- b) $\dim \ker(T - \mathcal{E}) = 2$;
- c) $\dim \operatorname{Im} T = \dim \ker(T - \mathcal{E})$;
- d) $\dim \ker T = 2$;
- e) o polinômio minimal $m_T(x) = x^2(x-1)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ a) e c)
- ☐ b) a) e d)
- ☐ c) b) e e)
- ☐ d) apenas a)
- ☐ e) apenas c)

Teste 8 [diagonal12] Sejam V um espaço linear, $\dim V = 4$, e $T \in \mathcal{L}(V)$, com polinômio caraterístico $p_T(x) = x^2(x-2)^2$.

Então, T é diagonalizável se e somente se

- a) $\dim \ker(T - 2\mathcal{E}) = 2$;
- b) o polinômio minimal $m_T(x) = x(x-2)$;
- c) $\dim \ker T = 2$;
- d) $\dim \operatorname{Im} T = \dim \ker(T - 2\mathcal{E})$;
- e) o polinômio minimal $m_T(x) = x^2(x-2)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ b) e d)
- ☐ a) e c)
- ☐ c) apenas a)
- ☐ d) e e)
- ☐ e) apenas d)

Teste 9 [autovalores1] Seja T um operador linear de um espaço vetorial V de dimensão n . Considere as seguintes condições:

- (I) T tem n autovalores não nulos diferentes;
- (II) T é inversível;
- (III) T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- a) (II) implica (I) e (III) implica (I);
- b) (I) implica (II) e (II) implica (III);
- c) (I) implica (II) e (I) implica (III);
- d) (I) implica (II) e (III) implica (II);
- e) (II) implica (I) e (II) implica (III).

- ☒ c)
- ☐ b) a)
- ☐ c) b)
- ☐ d) d)
- ☐ e) e)

Teste 10 [autovalores2] Seja T um operador linear de um espaço vetorial V de dimensão n .

Considere as seguintes condições:

(I) T tem n autovalores diferentes;

(II) $\dim \text{Im } T \geq n - 1$;

(III) T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

a) (III) implica (I) e (III) implica (II);

b) (I) implica (II) e (II) implica (III);

c) (I) implica (II) e (III) implica (II);

d) (I) implica (II) e (I) implica (III);

e) (II) implica (I) e (II) implica (III).

☒ d)

☐ b) c)

☐ c) b)

☐ d) a)

☐ e) e)

Teste 11 [semelhante1] Determine quais das matrizes abaixo são semelhantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) todas três são semelhantes;

b) nenhuma das duas são semelhantes;

c) somente A e B ;

d) somente A e C ;

e) somente B e C .

Assinale a alternativa correta:

☒ c)

☐ b) a)

☐ c) b)

☐ d) d)

☐ e) e)

Teste 12 [semelhante2] Determine quais das matrizes abaixo são semelhantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- a) todas três são semelhantes;
- b) nenhuma das duas são semelhantes;
- c) somente A e B ;
- d) somente A e C ;
- e) somente B e C .

Assinale a alternativa correta:

- ☒ a)
- ☐ b)
- ☐ c)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 13 [nilpotente1] Qual é a forma de Jordan da matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) $J_5(0)$;
- b) $J_4(0) \oplus J_1(0)$;
- c) $J_3(0) \oplus J_2(0)$;
- d) $J_2(0) \oplus J_2(0) \oplus J_1(0)$;
- e) $J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ c)
- ☐ a)
- ☐ b)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 14 [nilpotente2] Qual é a forma de Jordan da matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) $J_5(0)$;
- b) $J_3(0) \oplus J_2(0)$;
- c) $J_4(0) \oplus J_1(0)$;
- d) $J_2(0) \oplus J_2(0) \oplus J_1(0)$;
- e) $J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ b)
- ☐ c)
- ☐ a)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 15 [Jordan1] Qual é a forma de Jordan da matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) $J_3(0) \oplus J_2(1)$;
- b) $J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(1)$;
- c) $J_3(0) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1)$;
- d) $J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(1)$;
- e) $J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ b)
- ☐ a)
- ☐ c)
- ☐ d)
- ☐ e)

CATALOG

Teste 16 [Jordan2] Qual é a forma de Jordan da matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) $J_2(0) \oplus J_3(2)$;
- b) $J_2(0) \oplus J_2(2) \oplus J_1(2)$;
- c) $J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_3(2)$;
- d) $J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(2) \oplus J_1(2)$;
- e) $J_2(0) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ b)
- ☐ c)
- ☐ a)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 17 [polinomio1] Qual é o polinômio minimal $m_A(x)$ da matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) $x^2(x-1)^3$;
- b) $x^2(x-1)^2$;
- c) $x(x-1)$;
- d) $x^2(x-1)$;
- e) $x(x-1)^2$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ b)
- ☐ a)
- ☐ c)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 18 [polinomio2] Qual é o polinômio minimal $m_A(x)$ da matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) $x^2(x-2)$;
- b) $x^2(x-2)^3$;
- c) $x(x-2)$;
- d) $x^2(x-2)^2$;
- e) $x(x-2)^2$.

Assinale a alternativa correta:

☒ d)

☐ B c)

☐ C b)

☐ D a)

☐ E e)

Teste 19 [potencial] Considere a matriz $f(A)$, onde $f(x) = x^{2020} + ax$, $a \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Então a soma das duas entradas da primeira linha de $f(A)$ é igual a:

- a) $(2020a - 2019) \cdot 2^{2019}$;
- b) $2020 \cdot 2^{2019} + 2019a$;
- c) $(2019 + a) \cdot 2^{2020}$;
- d) $-2019 \cdot 2^{2020}$;
- e) $2019 \cdot (2^{2020} + a)$.

Assinale a alternativa correta:

☒ d)

☐ B a)

☐ C b)

☐ D c)

☐ E e)

CATALOG

Teste 20 [potencia2] Considere a matriz $f(A)$, onde $f(x) = x^{2019} + ax$, $a \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Então a soma das duas entradas da segunda linha de $f(A)$ é igual a:

- a) $(2020a - 2019) \cdot 2^{2019}$;
- b) $2020 \cdot 2^{2019} + 2019a$;
- c) $(2019 + a) \cdot 2^{2020}$;
- d) $-2018 \cdot 2^{2019}$;
- e) $2019 \cdot (2^{2020} + a)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ d)
- ☐ B) c)
- ☐ C) a)
- ☐ D) b)
- ☐ E) e)

CATALOG

Teste 20 [potencia2] Considere a matriz $f(A)$, onde $f(x) = x^{2019} + ax$, $a \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Então a soma das duas entradas da segunda linha de $f(A)$ é igual a:

- a) $(2020a - 2019) \cdot 2^{2019}$;
- b) $2020 \cdot 2^{2019} + 2019a$;
- c) $(2019 + a) \cdot 2^{2020}$;
- d) $-2018 \cdot 2^{2019}$;
- e) $2019 \cdot (2^{2020} + a)$.

Assinale a alternativa correta:

☒ d)

☐ B) c)

☐ C) a)

☐ D) b)

☐ E) e)

CATALOG

Teste 20 [potencia2] Considere a matriz $f(A)$, onde $f(x) = x^{2019} + ax$, $a \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Então a soma das duas entradas da segunda linha de $f(A)$ é igual a:

- a) $(2020a - 2019) \cdot 2^{2019}$;
- b) $2020 \cdot 2^{2019} + 2019a$;
- c) $(2019 + a) \cdot 2^{2020}$;
- d) $-2018 \cdot 2^{2019}$;
- e) $2019 \cdot (2^{2020} + a)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ d)
- ☐ B) c)
- ☐ C) a)
- ☐ D) b)
- ☐ E) e)