



MAT-0222 — Álgebra Linear II — IME-USP

Segunda Prova — 18/06/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido usar celular durante o exame.**
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 10h30min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!

©Coryleft — IME — USP

Teste 1 [produto1] Determine quais das funções $(,): \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ abaixo definem um produto interno em $\mathbb{C}^4$:

- a) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = a\bar{x} + b\bar{y} + 2c\bar{z} - d\bar{w}$;
- b) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = ax + by + cz + dw$;
- c) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = \bar{a}y + \bar{b}x + \bar{c}z + \bar{d}w$;
- d) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = a\bar{x} + 4b\bar{y} + 3c\bar{z} + d\bar{w}$;
- e) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z}$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ apenas d)
- ☐ a) e b)
- ☐ b) e c)
- ☐ apenas b)
- ☐ apenas e)

Teste 2 [produto2]

Determine quais das funções $(,): \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ abaixo definem um produto interno em $\mathbb{C}^4$:

- a) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = a\bar{x} - b\bar{y} + 2c\bar{z} + 3d\bar{w}$;
- b) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = a\bar{x} + \bar{b}y + 2\bar{c}z + \bar{d}w$;
- c) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = a\bar{x} + 2b\bar{y} + 5c\bar{z} + 3d\bar{w}$;
- d) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = ax + by + cz + dw$;
- e) $((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = a\bar{x} + b\bar{y} + d\bar{w}$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ apenas c)
- ☐ apenas d)
- ☐ b)
- ☐ a) e c)
- ☐ apenas e)

Teste 3 [norm1] Seja V um espaço unitário. Vetores $u, v \in V$ são ortogonais se, e somente se,

- a) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;
- b) $\|u + iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;
- c) $\|u + v\|^2 + i\|u + iv\|^2 = \|u - v\|^2 + i\|u - iv\|^2$;
- d) $\|u + v\|^2 + \|u + iv\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ c)
- ☐ d) e c)
- ☐ d)
- ☐ b)
- ☐ a) e c)

Teste 4 [norm2] Seja V um espaço unitário. Vetores $u, v \in V$ são ortogonais se, e somente se,

- a) $\|u + v\|^2 + \|u + iv\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$;
- b) $\|u + v\|^2 + i\|u + iv\|^2 = \|u - v\|^2 + i\|u - iv\|^2$;
- c) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$;
- d) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ b)
- ☐ a) e c)
- ☐ d)
- ☐ c)
- ☐ a)

Teste 5 [adjunto1] Seja V um espaço com produto interno, $a, b, c, d \in V$. Definamos um operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ por

$$T(v) = \langle v, a \rangle b + \langle v, c \rangle d.$$

Então o adjunto T^* é dado por:

- a) $T^*(v) = \langle v, b \rangle a + \langle v, d \rangle c$;
- b) $T^*(v) = \langle v, a \rangle c + \langle v, b \rangle d$;
- c) $T^*(v) = \langle v, a \rangle d + \langle v, b \rangle c$;
- d) $T^*(v) = \langle v, a + b \rangle (c + d)$;
- e) $T^*(v) = \langle v, c + d \rangle (a + b)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ a)
- ☐ c)
- ☐ b)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 6 [adjunto2] Seja V um espaço com produto interno, $a, b, c, d \in V$. Definamos um operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ por

$$T(v) = \langle v, a \rangle b - \langle v, c \rangle d.$$

Então o adjunto T^* é dado por:

- a) $T^*(v) = \langle v, b \rangle a - \langle v, d \rangle c$;
- b) $T^*(v) = \langle v, a \rangle c - \langle v, b \rangle d$;
- c) $T^*(v) = \langle v, a \rangle d - \langle v, b \rangle c$;
- d) $T^*(v) = \langle v, a - b \rangle (c + d)$;
- e) $T^*(v) = \langle v, c - d \rangle (a + b)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ a)
- ☐ c)
- ☐ b)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 7 [simetrico1] Suponha que $\mathbb{R}^2$ esteja munido de um produto interno $(,)$ e que a base $B = \{(1, -1), (1, -2)\}$ seja ortonormal em relação a $(,)$. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Assinale a alternativa correta:

- a) T é normal mas não é simétrico;
- b) T é simétrico e positivo definido;
- c) T é simétrico mas não é positivo semi-definido;
- d) T é simétrico e positivo semi-definido;
- e) T não é normal.

☒ apenas d)

☐ apenas a)

☐ b) e d)

☐ apenas e)

☐ apenas c)

Teste 8 [simetrico2] Suponha que $\mathbb{R}^2$ esteja munido de um produto interno $(,)$ e que a base $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ seja ortonormal em relação a $(,)$. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Assinale a alternativa correta:

- a) T é normal mas não é simétrico;
- b) T é simétrico e positivo definido;
- c) T é simétrico mas não é positivo semi-definido;
- d) T é simétrico e positivo semi-definido;
- e) T não é normal.

☒ apenas d)

☐ apenas a)

☐ b) e d)

☐ apenas e)

☐ apenas c)

Teste 9 [norma11] Considere $V = \mathbb{C}^3$ munido do produto interno usual, e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:

- os únicos autovalores de T são i e $-i$;
- T é normal;
- o subespaço de autovetores associados com autovalor i é $V_{\{i\}} = [(i, 1, 1), (i, 0, 1)]$.

Então, $T(1, 2, i)$ é igual a

- a) $(i, 2, 1)$;
- b) $(0, i, 2)$;
- c) $(-i, 2i, 1)$;
- d) $(1, 2, 3i)$;
- e) $(1, 2i, 1)$.

Assinale a alternativa correta:

☒ c)

☐ a)

☐ b)

☐ d)

☐ e)

Teste 10 [normal2] Considere $V = \mathbb{C}^3$ munido do produto interno usual, e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:

- os únicos autovalores de T são i e 1 ;
- T é normal;
- o subespaço de autovetores associados com autovalor i é $V_{\{i\}} = [(1, 1, i), (0, 1, i)]$.

Então, $T(i, 2, 2i)$ é igual a

- a) $(i, 2, 1)$;
- b) $(0, i, 2)$;
- c) $(-1, 2i, -2)$;
- d) $(-1, 2, 3i)$;
- e) $(1, 2i, -1)$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ c)
☐ b)
☐ a)
☐ d)
☐ e)

Teste 11 [polar1] Considere a decomposição polar $T = SU$ de um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ como um produto de um operador positivo semidefinido S e um operador ortogonal U . Se o operador

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ é dado pela matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ na base canônica de $\mathbb{R}^2$, qual será a segunda linha da matriz de operador S ?

- a) $(1, 2)$;
- b) $\frac{1}{\sqrt{3}}(0, 3)$;
- c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(2, 4)$;
- d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-2, 4)$;
- e) $(0, \sqrt{2})$.

Assinale a alternativa correta:

- ☒ c)
☐ a)
☐ b)
☐ d)
☐ e)

Teste 12 [polar2] Considere a decomposição polar $T = SU$ de um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ como um produto de um operador positivo semidefinido S e um operador ortogonal U . Se o operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ é dado pela matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ na base canônica de $\mathbb{R}^2$, qual será a segunda linha da matriz de operador S ?

- a) $(1, 2)$;
- b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 5)$;
- c) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 3)$;
- d) $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 5)$;
- e) $(0, 5)$. Assinale a alternativa correta:

- ☒ b)
- ☐ c)
- ☐ d)
- ☐ a)
- ☐ e)

Teste 13 [tt1] Sejam U, V espaços com produto interno, $T \in \mathcal{L}(U, V)$ uma aplicação linear de U a V e $T^* \in \mathcal{L}(V, U)$ a aplicação adjunta. Considere as afirmações abaixo e assinale a alternativa correta:

- a) T é sobrejetora se, e somente se, T^* for sobrejetora;
- b) T é injetora se, e somente se, T^* for injetora;
- c) T é injetora se, e somente se, T^* for sobrejetora;
- d) T é bijetora se, e somente se, T^* for bijetora.

- ☒ c) e d)
- ☐ a) e c)
- ☐ b) e d)
- ☐ apenas d)
- ☐ a) e b)

Teste 14 [tt2] Sejam U, V espaços com produto interno, $T \in \mathcal{L}(U, V)$ uma aplicação linear de U a V e $T^* \in \mathcal{L}(V, U)$ a aplicação adjunta. Considere as afirmações abaixo e assinale a alternativa correta:

- a) T é sobrejetora se, e somente se, T^* for sobrejetora;
- b) T é injetora se, e somente se, T^* for injetora;
- c) T é sobrejetora se, e somente se, T^* for injetora;
- d) T é injetora se, e somente se, T^* for sobrejetora;
- e) T é bijetora se, e somente se, T^* for bijetora.

- ☒ c), d) e e)
- ☐ a) e b)
- ☐ c) e d)
- ☐ b) e e)
- ☐ apenas e)

Teste 15 [quadratica1] Considere a forma quadrática

$$q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ um parâmetro.

A assinatura (r_+, r_-, r_0) da forma q em função do parâmetro λ é igual a:

- a) $(3, 0, 0)$ para $\lambda = 3$;
- b) $(2, 0, 1)$ para $\lambda = -1$;
- c) $(2, 0, 1)$ para $\lambda = 2$;
- d) $(1, 1, 1)$ para $\lambda = \sqrt{2}$;
- e) $(2, 1, 0)$ para $\lambda = -3$.

Assinale a alternativa correta:

☒ a), c), e)

☐ a), d)

☐ b), c), e)

☐ c), d)

☐ d), e)

Teste 16 [quadratica2] Considere a forma quadrática

$$q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ um parâmetro.

A assinatura (r_+, r_-, r_0) da forma q em função do parâmetro λ é igual a:

- a) $(3, 0, 0)$ para $\lambda = 2$;
- b) $(2, 1, 0)$ para $\lambda = -2$;
- c) $(2, 0, 1)$ para $\lambda = -\sqrt{\frac{5}{3}}$;
- d) $(1, 1, 1)$ para $\lambda = \sqrt{2}$;
- e) $(3, 0, 0)$ para $\lambda = 1$.

Assinale a alternativa correta:

☒ b), c), e)

☐ a), c)

☐ a), d), e)

☐ b), e)

☐ b), c)

Teste 17 [aproximacao1] Qual é a melhor aproximação do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

- a) $x = \frac{9}{5}, y = \frac{7}{5};$
- b) $x = \frac{8}{5}, y = \frac{4}{5};$
- c) $x = \frac{9}{5}, y = \frac{1}{5};$
- d) $x = 2, y = 1;$
- e) $x = 1, y = 1.$

Assinale a alternativa correta:

- ☒ c)
- ☐ a)
- ☐ b)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 18 [aproximacao2] Qual é a melhor aproximação do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

- a) $x = \frac{-26}{45}, y = \frac{23}{45};$
- b) $x = \frac{6}{5}, y = \frac{-1}{5};$
- c) $x = \frac{-3}{5}, y = \frac{7}{15};$
- d) $x = 2, y = 1;$
- e) $x = \frac{-1}{2}, y = \frac{1}{2}.$

Assinale a alternativa correta:

- ☒ b)
- ☐ a)
- ☐ c)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 19 [quadrica1] Dada uma quádrlica cuja equação no sistema $\{0, i, j, k\}$ é

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4yz + 2x + 4y - 8z = 1.$$

Seja $\{0', e_1, e_2, e_3\}$ um sistema ortonormal no qual sua equação fica na forma reduzida.

Considere as afirmações abaixo e assinale a alternativa correta:

- a) a quádrlica é um hiperboloide de uma folha, com o centro $0' = (-1, -2, 0)$;
- b) a quádrlica é um hiperboloide de duas folhas, com o centro $0' = (\sqrt{2}, -2, \sqrt{2})$;
- c) a quádrlica é um elipsoide, com o centro $0' = (2, 2, 1)$;
- d) a quádrlica é um cilindro hiperbólico, com o centro $0' = (1, -2, 1)$;
- e) a quádrlica é um hiperboloide de uma folha, com o centro $0' = (\sqrt{2}, -2, \sqrt{2})$.

- ☒ a)
- ☐ b)
- ☐ c)
- ☐ d)
- ☐ e)

Teste 20 [quadrica2] Dada uma quádrlica cuja equação no sistema $\{0, i, j, k\}$ é

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4yz - 2x - 4y - 8z = 1.$$

Seja $\{0', e_1, e_2, e_3\}$ um sistema ortonormal no qual sua equação fica na forma reduzida.

Considere as afirmações abaixo e assinale a alternativa correta:

- a) a quádrlica é um hiperboloide de uma folha, com o centro $0' = (1, 2, 0)$;
- b) a quádrlica é um hiperboloide de duas folhas, com o centro $0' = (-\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$;
- c) a quádrlica é um elipsoide, com o centro $0' = (-2, -2, 1)$;
- d) a quádrlica é um cilindro hiperbólico, com o centro $0' = (-1, 2, 1)$;
- e) a quádrlica é um hiperboloide de uma folha, com o centro $0' = (-\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$.

- ☒ a)
- ☐ b)
- ☐ c)
- ☐ d)
- ☐ e)

©Coryleft — IME — USP

2019 – MAT- 0222 – Segunda Prova – Folha de Respostas

Respostas ilegíveis ou não indicadas nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Assinatura _____

Por favor coloque seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as **primeiras colunas** em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas:

Teste 1: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 2: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 3: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 4: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 5: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 6: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 7: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 8: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 9: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 10: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 11: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 12: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 13: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 14: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

CATALOG

Teste 15: ☒ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 16: ☒ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 17: ☒ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 18: ☒ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 19: ☒ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 20: ☒ B ☐ C ☐ D ☐ E

©Coryleft — IME-USP

©Coryleft — IME — USP