Prova I, Algebra Linear II– MAT0222 — Albert Fisher – 8 de junho de 2021

Coloque o seu nome, numero USP, assinatura em cima da página um. Justifique suas respostas! Boa sorte!

Nota: Nao escreve nesta folha. Favor esrceve em uma folha so (não no verso) de papel branco e com caneta ou lapis escuro para deixar o mais legivel possivel. Depois escanear ou tira foto e madar para mim num email.

(1a) Uma matriz M agindo nos vetores colunas por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

geometricamente descreve uma rotação do plano no sentido anti-horário por qual angulo θ?
(1b) Ache M^{18} para a matriz M acima.
(1c) Ache a matriz N que geometricamente descreve uma refleção no eixo x.
(1d) Ache uma matriz P que descreve a rotação dado por M seguido pela refleção. Isto é uma rotacão? Porque sim ou não?

(2) Dado a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2a) Ache uma matriz elementar tal que EM está na forma escolonada.
(2b) Ache uma base para $\mathrm{Lin}(M)$, o espaço de linhas do M.

(2c) Considere a sistema de equações

$$\begin{aligned} w + y + z &= 0 \\ x + -3y + z &= 0 \\ w + x + -2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando parte (a), escreve o espaço de soluções $\mathbf{v} = (w, x, y, z)$ numa forma parametrizada. Qual e a dimensão deste espaço?

(3) A base padrão para o espaço vetorial $V = \mathcal{P}_4$ de polinomios complexas de grau ≤ 4 é $\mathcal{B} = (1, z, z^2, z^3, z^4)$. Definamos uma transformaçao linear $D : V \to V$ por $D(p) = p'$, a derivada (a derivada complexa segue as mesmas regas como a derivada real).
(3a) Ache uma matriz M para D no base $\mathcal{B}$.
Qual e a nullidade $\mathrm{Nul}(M)$? Qual e a imágem $\mathrm{Im}(M)$?

(3b) Ache a matriz para a segunda derivada, $F(p) = p''$, em duas maneiras diferentes. Explica.

(3c) Considere a função $\Phi : V \to \mathbb{C}$ dado por $\Phi(p) = p(2)$. Verifique que Φ é linear. Ache uma matriz K para Φ no base $\mathcal{B}$. Escreve a equação $\Phi(p) = 0$ na forma matricial, e ache uma base para o espaço de solucões Sol.