Prova II, Algebra Linear II– MAT0222 — Albert Fisher – 13 de julho de 2021

Coloque o seu nome, numero USP, assinatura em cima da página um. Justifique suas respostas! Boa sorte!

Nota: Nao escreve nesta folha. Favor esrceve em uma folha so (não no verso) de papel branco e com caneta ou lapis escuro para deixar o mais legivel possivel. Depois escanear ou tira foto e madar para mim num email.

IMPORTANTE: Favor mande o seu arquivo separado (nao como Reply). O nome do arquivo, e tambem o titulo do seu email, deve ser: MAT0222-P2-SeuNomeCompleto.pdf

(1)
Dado um espaço vetorial V com produto interno $\langle \cdot, \cdot, \rangle$, mostre:
(**a**) Se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ para todos os vetores $\mathbf{v}$ então $\mathbf{w} = \mathbf{u}$.
(**b**) Se E e um subconjunto de V, definamos $E^\perp = \{\mathbf{v} : \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle \text{para todos os } \mathbf{e} \in E\}$.
Então $U = E^\perp$ é un subespaço vetorial do V.

(2) Para o espaço vetorial de matrizes $(n \times n)$ real, $M_n(\mathbb{R})$, considere $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$. Verifque que S é um subespaço. Qual e a dimensão do S? Ache uma base.

(3) No $V = M_2(\mathbb{R})$, o traço do matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é $\operatorname{tr}(A) = a + d$.
(**a**) Mostre que $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$ define um produto interno no V.
(**b**) Com respeito a este produto interno, considere $E = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e define $U = E^\perp$ (veja (1) acima!) Ache uma base para U.

(4) A base padrão para o espaço vetorial $\mathcal{P}_n$ de polinomios reais de grau $\leq n$ é $\mathcal{B}_n = (1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$. Para $f(x) = x + x^3$, definamos uma transformaçao linear $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_6$ pelo produto $D(p) = f \cdot p$.
Ache uma matriz M para D nos bases $\mathcal{B}_n$.

(5)
Dado a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(5a) Ache os valores próprios do A.
(5b) Ache os vetores próprios do A.
(5c) Ache uma matriz diagonal D e uma matriz invertivel B tal que $B^{-1}AB = D$.