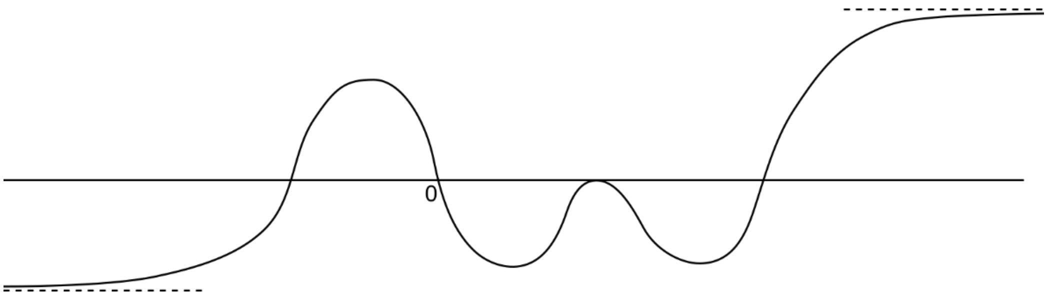
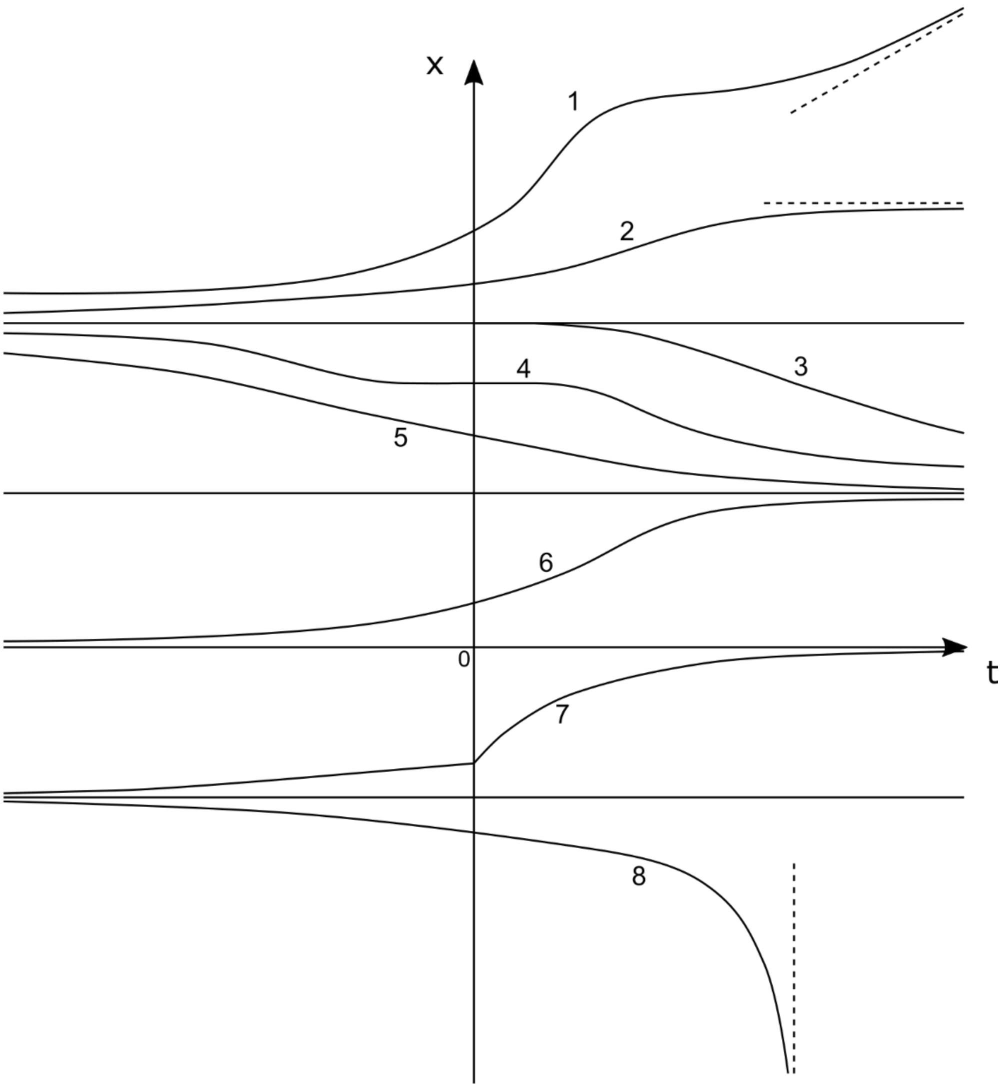
GABARITO PROVA 1 – MAT0226 – Equações Diferenciais I

1. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 compatível com o esboço de gráfico abaixo.



(Os pontilhados indicam assíntotas horizontais.) Sabendo que o esboço do diagrama de soluções de $x' = f(x)$ mostrado abaixo contém 7 erros, encontre-os, <u>indicando-os</u> e <u>justificando por que são erros</u>. (Atenção: os erros são qualitativos, isto é, não há preocupação com a escala) (Os pontilhados são assíntotas)



Há quatro zeros e três pontos críticos da função f:

$$x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3 < c_3 < x_4$$

(os x_i são zeros, os c_i são pontos críticos). As quatro soluções constantes $x(t) \equiv x_i$ estão corretamente representadas no diagrama.

Antes de discutir os erros, vale a pena destacar algumas propriedades que decorrem das hipóteses.

(I) Como f é C^1, vale existência e unicidade local do problema de Cauchy.

(II) Como $|f'|$ é limitada (é limitada em intervalos limitados e tende a valores constantes quando $x \to \pm\infty$), então f é Lipschitz. Isso implica que todas as soluções são globais, isto é, estão definidas para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

(III) Segue da própria definição de ser solução que uma solução tem que ser diferenciável.

(IV) O sinal de $x'(t)$ é igual ao sinal de f em $x(t)$, isto é, $x(t)$ é crescente se $f\big(x(t)\big) > 0$ e $x(t)$ é decrescente se $f\big(x(t)\big) < 0$.

(V) Como a equação é autônoma, $x'(t) = 0$ se e somente se $f\big(x(t)\big) = 0$, isto é, se e somente se $x(t)$ é uma das singularidades.

(VI) É possível inferir que $x(t)$ é C^2 e concluir sobre o sinal de x'' (eu não havia pensado nisso ao colocar os erros propositalmente, mas acabaram aparecendo contradições nesse sentido que foram mencionadas por alguns alunos). A ideia é o seguinte: (i) como $x(t)$ é diferenciável, em particular é contínua; (ii) sendo f contínua, então a composta $f(x(t))$ tem que ser contínua, de onde segue que $x'(t)$ é contínua, isto é, $x(t)$ é C^1; (iii) mas, por hipótese, f é C^1, então a composta $f(x(t))$ é C^1, de onde segue que $x'(t)$ é C^1, isto é, $x(t)$ é C^2. **[Prove, seguindo a mesma ideia: se $\boldsymbol{f}$ é $\boldsymbol{C^k}$ então $\boldsymbol{x(t)}$ é $\boldsymbol{C^{k+1}}$.]**
Como $x''(t) = \frac{d}{dt}\Big(f\big(x(t)\big)\Big) = f'\big(x(t)\big) \cdot x'(t) = f'\big(x(t)\big) \cdot f(x(t))$, então o sinal de $x''(t)$ é igual ao produto dos sinais de f e de f' no ponto $x(t)$.

(VII) Pode-se também falar em "concavidade" sem propriamente calcular o sinal de x''. Basta ver diretamente se x' está crescendo (concavidade para cima) ou decrescendo (concavidade para baixo). Por exemplo, se $x(t)$ é uma solução crescente é porque $x'(t) = f\big(x(t)\big) > 0$. Ao mesmo tempo, $x'(t)$ cresce ou decresce se $f(x)$ cresce ou decresce. (Alguns alunos usaram isso) **[Pense no caso em que $\boldsymbol{x(t)}$ é decrescente.]**

(VIII) Dentro das hipóteses, se $x(t)$ se aproxima assintoticamente de um ponto x_*, então esse ponto tem que ser uma singularidade. **[PROVE!]**

(IX) É possível também comparar duas soluções diferentes, se elas estiverem confinadas entre as mesmas singularidades. Nós comentamos, nas aulas, que se x e y são soluções da mesma equação diferencial, a primeira com $x(t_0) = x_0$ e a segunda com $y(t_1) = x_0$ (ou seja, mesma posição inicial, mas com instantes iniciais diferentes), então *uma é a translação horizontal da outra*. Mais precisamente, $y(t) = x(t - t_1 + t_0)$ (substitua t_1 nos dois lados e veja que ambos dão igual a x_0, como deveria ser).

Em vez de numerar os erros, numerei as soluções não constantes, para discutir o(s) erro(s) de cada uma delas.

Solução 1: A inclinação da assíntota deve ser o valor assintótico de f quando $x \to +\infty$. Até aí tudo bem. Mas esse também é o valor máximo de f à direita da singularidade x_4, ou seja, para soluções $x(t) > x_4$ a derivada $x'(t)$ não pode ultrapassar esse valor. O problema é que essa solução tem derivada maior do que a inclinação da assíntota em pelo menos um intervalo perto de onde está o "1".

Outro erro vem da afirmação VI acima: como nesse trecho f e f' são positivas, x'' deveria ser sempre positiva. No entanto essa solução tem um intervalo (também perto do "1") onde $x'' < 0$.

Solução 2: Também há dois erros. Primeiro, ela é assintótica a um ponto x_* que não é singularidade (ver VIII acima). Segundo, $x''(t)$ é negativa a partir de um certo valor de t (ver VI e VII).

Solução 3: Viola unicidade (ou, em outras palavras, chega em x_4 em tempo finito), contradizendo I.

Solução 4: O primeiro erro é que há um *plateau* com $x'(t) = 0$ fora de singularidades, contradizendo V. Outro erro é uma contradição com VI, novamente: entre x_3 e x_4 as soluções são decrescentes ($f < 0$) e, portanto, cruzam o ponto crítico c_3 uma e uma só vez. Quando $x(t) > c_3$, temos $f' > 0$, logo $x'' < 0$; quando $x(t) < c_3$, temos $f' < 0$, logo $x'' > 0$. Isto significa que as soluções devem ter uma única troca de concavidade, de negativa para positiva, quando t cresce, de $-\infty$ para $+\infty$. Mas a solução 4 não respeita isso.

Solução 5: Nada errado com ela.

Solução 6: Errada, porque nesse trecho (entre x_2 e x_3), as soluções devem ser decrescentes, pois $f < 0$, contradizendo IV.

Solução 7: Não é diferenciável, contradizendo III.

Solução 8: Não é global: está definida apenas até a abscissa vertical, contradizendo II. A maioria justificou o erro (corretamente), dizendo que $x'(t) \to -\infty$, o que contradiz f' limitada inferiormente.

Alguns apontaram contradições entre as soluções como erros: basicamente, o princípio de translação horizontal enunciado em IX. Isto ocorre claramente no trecho entre as singularidades x_3 e x_4, e também no trecho à direita de x_4, onde as soluções mostradas não obedecem a esse princípio.

2. Resolva <u>explicitamente</u> o problema de Cauchy $\boldsymbol{x' = x + t, x(0) = 1}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = x + t} \\ \boldsymbol{x(0) = 1} \end{cases}$$

Primeiro pegamos uma solução qualquer da parte homogênea $x' = x$: por exemplo, e^t. Então invertemos o sinal do tempo (ou seja, pegamos solução de $x' = -x$) para multiplicar pela solução $x(t)$ que ainda estamos procurando. Temos:

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-t}x(t)\big) = -e^{-t}x(t) + e^{-t}x'(t) = e^{-t}\big(x'(t) - x(t)\big) = te^{-t}$$

Então

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\big(e^{-s}x(s)\big)ds = \int_0^t se^{-s}ds$$

Uma primitiva do integrando da esquerda é $e^{-s}x(s)$. Uma primitiva do integrando da direita pode ser obtida por partes: $-(s+1)e^{-s}$. Então

$$e^{-t}x(t) - e^{-0}x(0) = -(t+1)e^{-t} + (0+1)e^{-0}$$

$$e^{-t}x(t) = 2 - (t+1)e^{-t}$$

$$x(t) = 2e^t - t - 1$$

Conferindo:

$x(0) = 2e^{-0} - 0 - 1 = 1$ OK

$x'(t) = 2e^t - 1 = x(t) + t$ OK

3. (a) É possível dizer que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = \dfrac{t}{1+x^2}\sin(tx^3)} \\ \boldsymbol{x(0) = 1} \end{cases}$$

tem <u>solução $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$</u>? Se tiver, é <u>única</u>?

(b) Se T é o operador de Picard, calcule $T\phi$ se $\phi(t) \equiv 1$.

(a) A ideia é investigar se é possível dizer que $f(t,x)$ é Lipschitz na variável x, de maneira uniforme em intervalos limitados em t. Para isso, basta examinar a derivada parcial em relação a x, buscando uma limitação para ela, uniforme em intervalos limitados de t. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\sin(tx^3) + \frac{3t^2x^2}{1+x^2}\cos(tx^3)$$

Então (fazendo-se as majorações necessárias...)

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \le 2 + 3t^2$$

Portanto, usando o TVM, obtemos

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi)\cdot(x_1 - x_2)\right| \le (2+3t^2)|x_1 - x_2|,$$

ou seja, f é Lipschitz na variável x com constante $2+3t^2$, logo uniformemente em intervalos limitados.

O teorema que demonstramos em classe mostra que, neste caso, existe solução única em qualquer intervalo de tempo $[a,b]$ e, por consequência, existe solução única $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Primeiro escrevemos o operador de Picard para esse Problema de Cauchy:

$$(T\phi)(t) = 1 + \int_0^t \frac{s}{1+\phi(s)^2}\sin(s\phi(s)^3)\,ds$$

Se $\phi(t) = 1$ então

$$(T\phi)(t) = 1 + \int_0^t \frac{s}{2}\sin(s)ds$$

Usando $-s\cos s + \sin s$ como primitiva de $s\sin s$:

$$(T\phi)(t) = 1 + \frac{1}{2}(-t\cos t + \sin t)$$

4. Obtenha a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = e^x \sin t} \\ \boldsymbol{x(0) = x_0} \end{cases}$$

(em função dos diferentes valores reais que x_0 pode assumir), tomando o cuidado de definir o <u>intervalo maximal</u> de definição de cada solução. ***Dica: sempre convém separar em casos...***

Trata-se de uma equação separável. Então

$$\int_{x_0}^{x(t)} e^{-x}\, dx = \int_0^t \sin t \ dt$$

$$-e^{-x(t)} + e^{-x_0} = -\cos t + \cos 0$$
$$e^{-x(t)} = e^{-x_0} + \cos t \ - 1$$
$$x(t) = -\log(e^{-x_0} - 1 + \cos t)$$

A solução só está definida no maior intervalo contendo $t = 0$ em que o argumento dentro do logaritmo é estritamente positivo. Dois casos: (i) Se $e^{-x_0} > 2$ (isto é, $x_0 < -\log 2$), então $e^{-x_0} - 1 + \cos t > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$; neste caso, a solução está definida globalmente; (ii) Se $e^{-x_0} \leq 2$ (isto é, $x_0 \geq -\log 2$), então o intervalo contendo a origem em que $e^{-x_0} - 1 + \cos t$ é positivo é o intervalo

$$(-\operatorname{acos}(1 - e^{-x_0}), +\operatorname{acos}(1 - e^{-x_0})),$$

aqui usando $\operatorname{acos}()$ como o ramo inverso do cosseno entre 0 e $+\pi$.

5. **Encontre $\boldsymbol{x(1)}$ com a melhor aproximação que puder, sendo $\boldsymbol{x(t)}$ a solução do problema de Cauchy**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = \dfrac{1}{1 + 2x + 5x^4}} \\ \boldsymbol{x(0) = 0} \end{cases}$$

Essa equação é autônoma, com $t_0 = 0$ e $x_0 = 0$, então $x(t)$ é o valor de x que satisfaz:

$$\int_0^x (1 + 2x + 5x^4)dx = \int_0^t 1\, ds$$

$$x + x^2 + x^5 = t$$

Então $x(1)$ é a solução (positiva, pois $x(t)$ é crescente; e única, neste caso, pois a função à esquerda é crescente), de

$$x^5 + x^2 + x - 1 = 0.$$

Usamos então o Método de Newton, com fórmula de recorrência

$$\phi(x) = x - \frac{x^5 + x^2 + x - 1}{5x^4 + 2x + 1}$$

Tomando $x_0 = 1$, por exemplo, conseguimos convergência para

$$0{,}58654371.$$