PROVA 2 – EDO

Q1. (2.0)

Esboce o retrato de fases do sistema

$$\begin{cases} x' = -x^2(x-1) \\ y' = -y/2 \end{cases}$$

Q2.

(a) **(2.0)** Supondo $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, encontre a solução de

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = xy^2 \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

explicitando seu intervalo maximal.

(b) **(1.0)** Esboce a trajetória relativa a essa solução (a imagem da solução), calculando e assinalando no esboço eventuais limites e/ou assíntotas.

Q3.

(a) **(2.0)** Esboce o retrato de fases de $x'' = -3x^2$.

(b) **(1.0)** Supondo $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$, determine o instante em que $x(t) = 0$. *(Pode dar o resultado na forma de uma integral)*

Q4.

(a) **(1.5)** Monte a fórmula de iteração correspondente ao Método de Euler de ordem 2 da equação diferencial

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = x + y \end{cases}$$

com passo h.

(b) **(0.5)** Com $h = 0.1$ e $(x_0, y_0) = (1,2)$, calcule o primeiro passo da iteração.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMATICA E ESTATISTICA

1

Nome______________________________________

Data ___/___/___ Nº. USP________________

Disciplina____________ Turma____________ Prof.____________

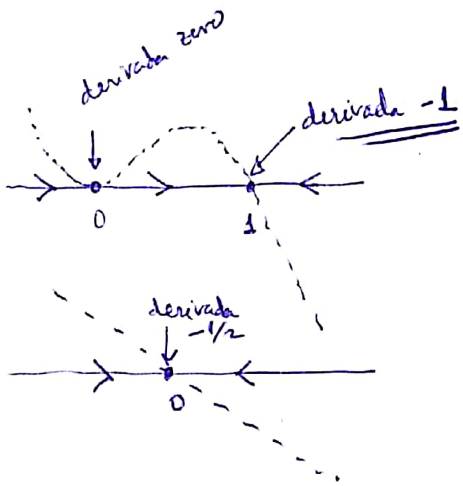
Nota
Q 1
Q 2
Q 3
Q 4

Q1

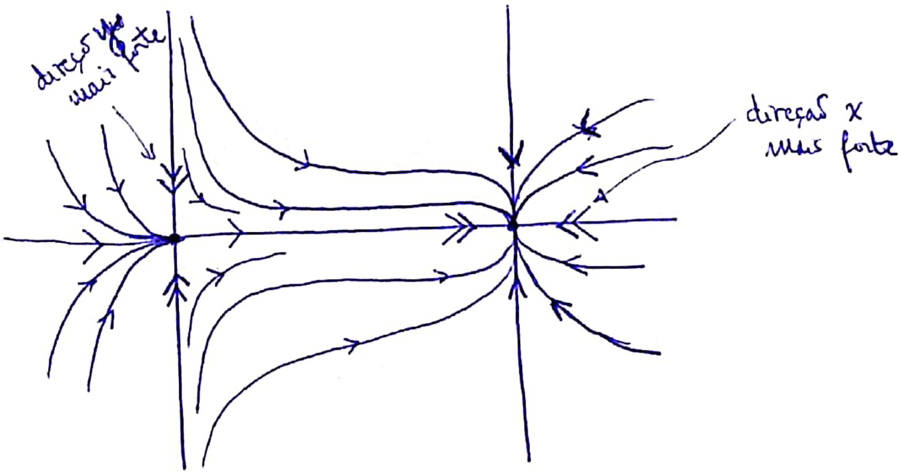
$$\begin{cases} x' = -x^2(x-1) \\ y' = -y/2 \end{cases}$$

$x' = -x^2(x-1)$ tem retrato

$y' = -y/2$ tem retrato



Combinando os dois:



Q2

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = xy^2 \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{com} \quad x_0, y_0 > 0$$

a

$$x' = 2x \implies \boxed{x(t) = e^{2t} x_0}$$

$$\implies y'(t) = x_0 e^{2t} y(t)^2$$

$$\int_0^t \frac{y'(t)}{y(t)^2} dt = \int_0^t x_0 e^{2t} dt$$

(leia-se "s" em vez de "t" como variável de integração)

LADO DIREITO: $\frac{x_0}{2} e^{2t} \Big|_0^t = \frac{x_0}{2}(e^{2t} - 1)$

LADO ESQUERDO: $u = y(t)$

$$= \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} \Big|_{y_0}^{y(t)} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}.$$

Então:

$$\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)} = \frac{x_0}{2}(e^{2t} - 1)$$

$$\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y_0} - \frac{x_0}{2}(e^{2t} - 1)$$

$$\boxed{y(t) = \left[\frac{1}{y_0} - \frac{x_0}{2}(e^{2t} - 1)\right]^{-1}}$$

(só testando: $(t=0 \implies) \; y(0) = \left[\frac{1}{y_0} - \frac{x_0}{2}(1-1)\right]^{-1} = y_0$ ✓)

INTERVALO MAXIMAL: p/ $x(t)$ não há restrições.

$\longrightarrow$

p/ $y(t)$, é o intervalo contendo zero em que

$$\frac{1}{y_0} - \frac{x_0}{2}(e^{2t}-1)$$

não se anula. De fato, onde é positiva, já que, quando ~~o~~ $t=0$, ela vale $1/y_0 > 0$ (por hipótese).

Ou seja, t é tal que

$$\frac{1}{y_0} - \frac{x_0}{2}(e^{2t}-1) > 0$$

$$\frac{1}{y_0} > \frac{x_0}{2}(e^{2t}-1)$$

$$\frac{2}{x_0 y_0} > e^{2t} - 1$$

$$e^{2t} < 1 + \frac{2}{x_0 y_0}$$

$$2t < \log\left(1 + \frac{2}{x_0 y_0}\right)$$

$$t < \frac{1}{2} \underbrace{\log\left(1 + \frac{2}{x_0 y_0}\right)}_{>0 \text{ pois } x_0, y_0 > 0}.$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{max} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2}{x_0 y_0}\right)\right)}$$

(b) Seja $t_+ \left(= t_+(x_0, y_0)\right)$ o valor $\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2}{x_0 y_0}\right)$.

Quando $t \to t_+$, $y(t) \to +\infty$.

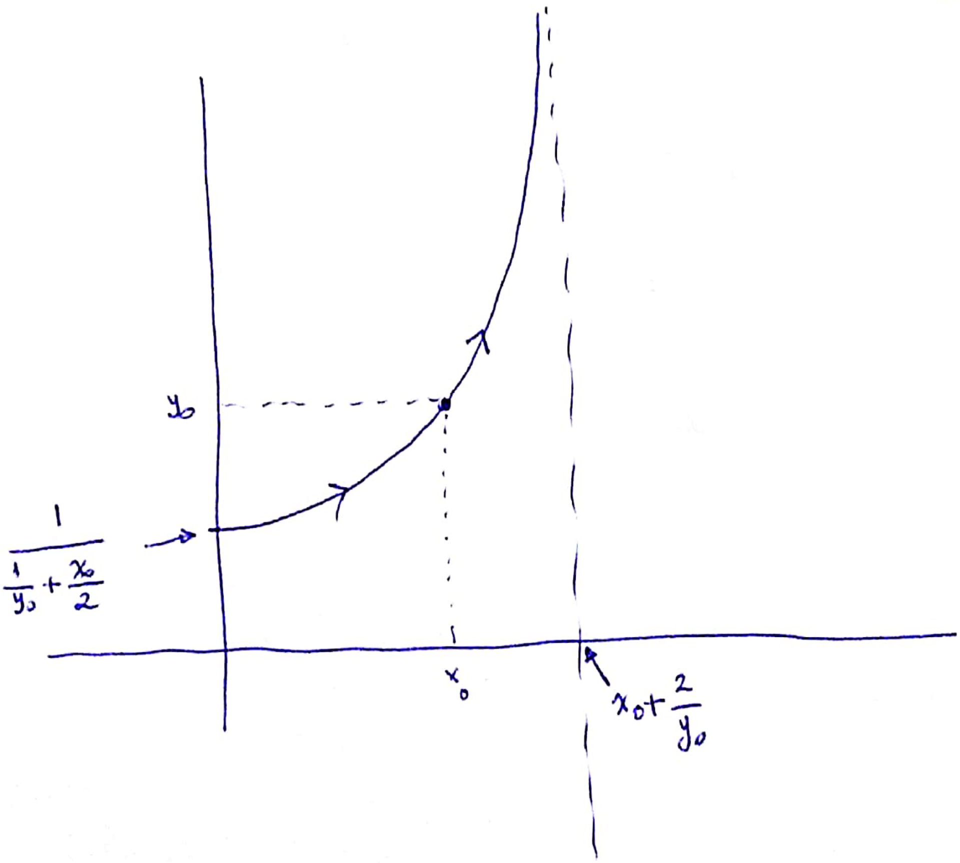
E

$$x(t) = e^{2t} x_0 \longrightarrow x_0 e^{2t_+} = x_0\left(1+\frac{2}{x_0 y_0}\right) = x_0 + \frac{2}{y_0} \quad (> x_0).$$

Quando $t \to -\infty$, $x(t) \to 0$.

E

$$y(t) = \left[\frac{1}{y_0} - \frac{x_0}{2}\left(e^{2t}-1\right)\right]^{-1} \to \left[\frac{1}{y_0} - \frac{x_0}{2}(-1)\right]^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{y_0}+\frac{x_0}{2}} \quad (< y_0)$$



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMATICA E ESTATISTICA

1

Nome____________ Nota

Q 1

Data ___/___/___ Nº. USP____________

Q 2

Disciplina____________ Turma____________ Prof.____________

Q 3

Q 4

Q3

a) É o retrato de $\begin{cases} x' = y \\ y' = -3x^2 \end{cases}$

Aqui $F(x) = -3x^2$ ("força")

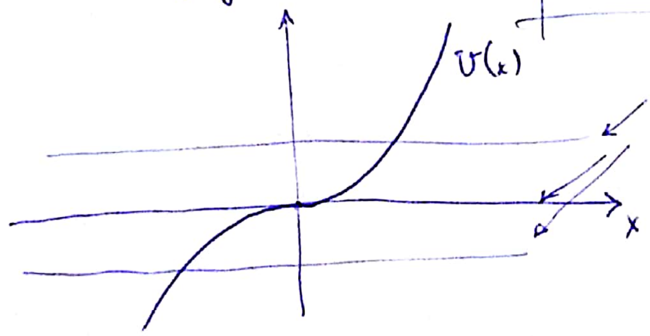
Potencial: $U(x) = -\int F(x) = x^3 + c$ (c arbitrário, escolhemos $c=0$)

$\Rightarrow \boxed{U(x) = x^3}$

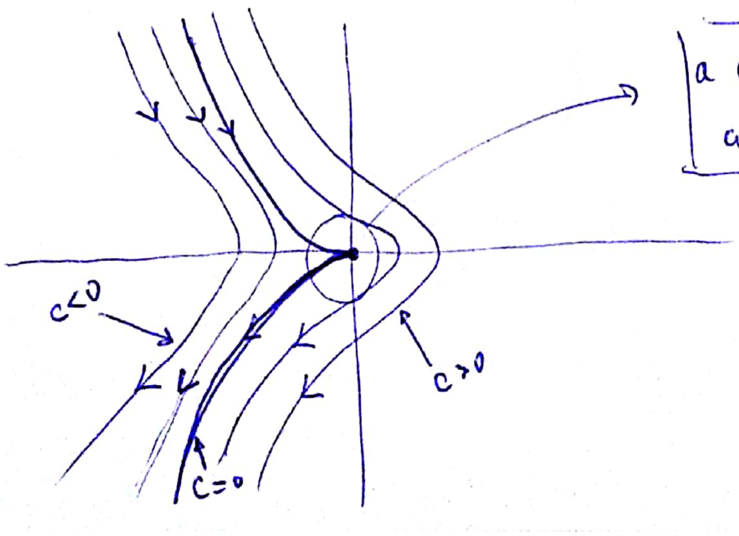
$E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + x^3$ é constante em trajetórias.

Curvas de nível:

$\frac{1}{2}y^2 + x^3 = c \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{2(c-x^3)}}$



diferentes valores de c p/ examinar $\sqrt{2(c-x^3)}$

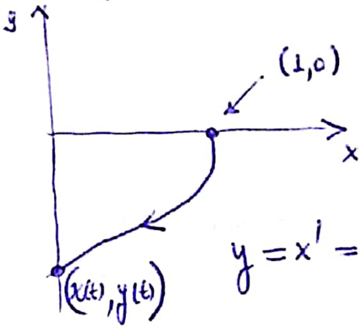


a cota c=0 se comporta como $\pm|x|^{3/2}$

Scanned by CamScanner

(b) $x(0) = 1$, $x'(0) = 0 \; (= y(0))$ e $x(t) = 0$

No retrato de fases:



$$y = x' = -\sqrt{2(c - x^3)}$$

P/ saber c, é só ver q.to vale $E(x,y)$ em $(1,0)$:

$$E(1,0) = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + 1^3 = 1.$$

$$\Rightarrow \quad x' = -\sqrt{2(1-x^3)}, \quad \text{com } x(0) = 1$$

Então:

$$\int_0^t \frac{x'(t)}{-\sqrt{2(1-x^3(t))}}\,dt = \int_0^t 1 = t$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{-\sqrt{2(1-u^3)}}\,du = t$$

Mas $x(t) = 0$ e $x_0 = 1$, logo

$$\boxed{t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2(1-u^3)}}\,du}$$

Q4

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = x + y \end{cases}$$

a)

$\cancel{x(t+h) = x(t)}$

$$x(t+h) = x(t) + h x'(t) + \frac{h^2}{2} x''(t) + \mathcal{O}(h^3)$$
$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$x'(t) = x(t)\, y(t)$$
$$x''(t) = x'(t)\, y(t) + x(t)\, y'(t) = x(t)\, y(t)^2 + x(t)\left(x(t) + y(t)\right)$$
$$y'(t) = x(t) + y(t)$$
$$y''(t) = x'(t) + y'(t) = x(t) y(t) + x(t) + y(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h x_k y_k + \frac{h^2}{2}\left(x_k^2 + x_k y_k + x_k y_k^2\right) \\ y_{k+1} &= y_k + h(x_k + y_k) + \frac{h^2}{2}\left(x_k + y_k + x_k y_k\right) \end{aligned}}$$

b) $h = 0.1 \quad x_0 = 1 \quad y_0 = 2$

$$x_1 = 1 + (0.1) \times 1 \times 2 + \frac{0.1^2}{2}\left(1^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2\right)$$
$$= 1 + 0{,}2 + \frac{0.01}{2}(7) = 1{,}2 + 0{,}035 = 1{,}235$$

$$y_1 = 2 + (0.1)(1+2) + \frac{0.1^2}{2}\left(1 + 2 + 1 \times 2\right)$$
$$= 2 + 0.3 + 0{,}025 = 2.325$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_1, y_1) = (1{,}235,\ 2{,}325)}$$