PROVA 4 – Equações Diferenciais I - 2018

(1)

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) (1.0) Ache a forma canônica de Jordan de A.

O polinômio característico é $(0-\lambda)(-3-\lambda)+2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2$. Suas raízes são -2 e -1. Então a forma canônica de Jordan de A é

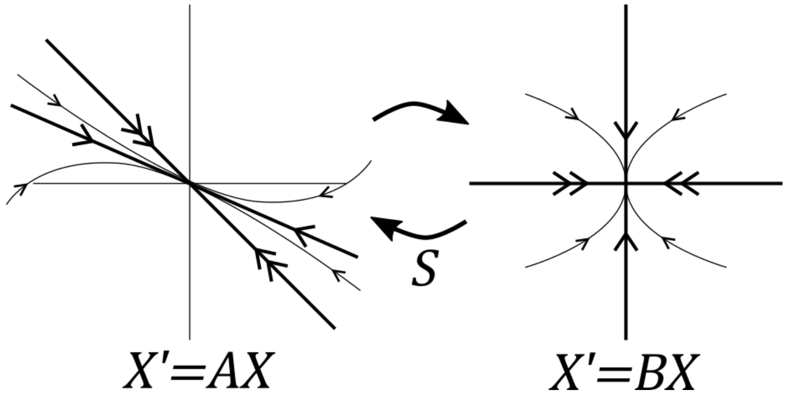
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) (1.0) Esboce o retrato de fases de $X^{'} = AX$.

Primeiro acharemos a matriz de semelhança entre A e B, isto é, a matriz S tal que $B = S^{-1}AS$. O retrato de fases de $X^{'} = AX$ é a imagem, por S, do retrato de fases de $X^{'} = BX$.

A matriz S é construída como tendo as colunas iguais aos autovetores correspondentes aos autovalores -2 e -1. Esses autovetores podem ser $(-1,+1)$ e $(+2,-1)$, respectivamente. Então

$$S = \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}.$$



Portanto $Se_1 = (-1,+1)$ é a direção de convergência mais forte, enquanto $Se_2 = (+2,-1)$ é a direção de convergência mais fraca. As soluções que não estão nessas duas direções convergem a zero com a curva imagem tangenciando a direção mais fraca.

(c) (1.0) Mostre que existe $\nu > 0$ tal que, para qualquer $X_0 \in \mathbb{R}^2$, existe $C > 0$ tal que a solução $\phi(t)$ de $X^{'} = AX, X(0) = X_0$ satisfaz $\|\phi(t)\| \leq Ce^{-\nu t}$, $\forall t \geq 0$.

Uma maneira de fazer é usando a forma canônica:

$$\phi(t) = e^{tA}X_0 = S^{-1}e^{tB}SX_0$$

Logo

$$\|\phi(t)\| \leq \|S^{-1}\|\|e^{tB}\|\|S\|\|X_0\|,$$

onde as normas das matrizes são as normas de operadores e as normas de vetores são alguma norma pré-fixada, por exemplo a norma do máximo. (Estabelecida uma norma, o resultado pode ser mostrado para qualquer outra, por equivalência entre normas de espaços de dimensão finita)

Vamos obter uma estimativa superior para a norma de operador da matriz diagonal (com as exponenciais e^{-2t} e e^{-t} calculada com respeito à norma do máximo. Temos

$$\begin{aligned}\|e^{tB}\,(u_1,u_2)\| = \|e^{-2t}\,u_1, e^{-t}\,u_2\| = \max\{e^{-2t}|u_1|, e^{-t}|u_2|\} \leq e^{-t}\max\{|u_1|,|u_2|\}\\ = e^{-t}\|(u_1,u_2)\|, \forall t \geq 0,\end{aligned}$$

em que $t \geq 0$ foi usado na última desigualdade.

Então

$$\|e^{tB}\| \leq e^{-t}, \forall t \geq 0$$

e

$$\|\phi(t)\| \leq \ \|S^{-1}\|\|S\|\|X_0\|e^{-t}, \forall t \geq 0.$$

Ou seja, $\nu = -1$ e $C = \|S^{-1}\|\|S\|\|X_0\|$.

Observação: Para ter-se um resultado independente de X_0, basta tomar $c = \|S^{-1}\|\|S\|$ e escrever

$$\|\phi(t)\| \leq \ c\|X_0\|e^{-t}, \forall t \geq 0.$$

Outro jeito de resolver: chame de U e V os autovetores de A correspondentes aos autovalores -2 e -1, respectivamente. Decomponha $X_0 = \alpha U + \beta V$. Então

$$\begin{aligned}\|\phi(t)\| = \|e^{tA}X_0\| = \|\alpha e^{tA}U + \beta e^{tA}V\| = \|\alpha e^{-2t}U + \beta e^{-t}V\|\\ \leq e^{-2t}|\alpha|\cdot\|U\| + e^{-t}|\beta|\cdot\|V\| \leq e^{-t}(|\alpha|\cdot\|U\| + |\beta|\cdot\|V\|), \forall t \geq 0,\end{aligned}$$

em que $t \geq 0$ foi usado na última desigualdade. Então basta tomar $C = |\alpha|\cdot\|U\| + |\beta|\cdot\|V\|$.

(2)

(a) (1.0) Determine $\mathrm{A}(t)$ tal que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ t & t^2 \end{pmatrix}$ seja matriz-solução de $X' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$, t>0.

Como $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, necessariamente

$$A(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1}.$$

Ora,

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$$

e

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{t^2e^t + t}\cdot\begin{pmatrix} t^2 & +1 \\ -t & e^t \end{pmatrix}.$$

Logo

$$A(t) = \frac{1}{t^2e^t + t}\begin{pmatrix} t^2e^t & e^t \\ -t^2 & 1 + 2te^t \end{pmatrix}$$

Em particular, como o determinante de $\Phi(t)$ é positivo (para $t > 0$, que está na hipótese), então $\Phi(t)$ é matriz fundamental.

(b) (1.0) Ache a solução $\phi(t)$ dessa mesma equação que satisfaça $\phi(1) = (-1, +2)$.

Aqui $t_0 = 1$. Vamos usar que

$$\phi(t) = \Phi(t) \cdot c,$$

para algum vetor $c = (c_1, c_2)$. Então c é obtido por

$$c = \Phi(1)^{-1}\phi(1) = \frac{1}{1+e}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/1+e \\ 1+2e/1+e \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/1+e \\ 1+2e/1+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t - 2e - 1/1+e \\ t + t^2(1+2e)/1+e \end{pmatrix}$$

(c) (1.0)+(1.0) Ache a solução de $X' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{b}(t), \mathrm{X}(1) = (-1, +2)$, onde $\mathrm{b}(t) = (-1, t^2)$. *(Um ponto para a dedução da fórmula para encontrar solução particular de não homogênea e um ponto para a solução propriamente dita)*

Dedução de uma solução particular que satisfaz $X(1) = 0$. Escrevemos $\psi(t) = \Phi(t)u(t)$ e impomos que $\psi'(t) = A(t)\psi(t) + b(t)$, isto é:

$$\big(\Phi(t)u(t)\big)' = A(t)\Phi(t)u(t) + b(t).$$

Mas o lado esquerdo pode ser desenvolvido com a regra do produto:

$$\big(\Phi(t)u(t)\big)' = \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) = A(t)\Phi(t)u(t) + \Phi(t)u'(t).$$

Igualando as duas e cancelando o termo que se repete em ambas,

$$u'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t).$$

Agora integramos, partindo de $t_0 = 1$:

$$u(t) = \int_1^t \Phi(s)^{-1}b(s)ds,$$

de onde sai

$$\psi(t) = \Phi(t)\int_1^t \Phi(s)^{-1}b(s)ds.$$

Para satisfazer a condição inicial, basta somar uma homogênea que satisfaça a mesma condição inicial, e isso foi calculado no item anterior:

$$\Phi(t)\int_1^t \Phi(s)^{-1}b(s)ds + \phi(t),$$

onde $\phi(t)$ é a solução do item (b).

Vejamos como fica a $\psi(t)$ neste exercício, com $b(t) = (-1, t^2)$:

$$\Phi(s)^{-1}b(s) = \frac{1}{s^2e^s + s}\cdot\begin{pmatrix} s^2 & +1 \\ -s & e^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de onde sai

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ t & t^2 \end{pmatrix}\int_1^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}$$

(3)

(a) (2.0) Ache a solução de $x''' - 5x'' + 7x' - 3\mathrm{x} = 0$ com $\mathrm{x}(0) = 1,\ x'(0) = 0, x''(0) = 0$.
Dica: $z^3 - 5\mathrm{z}^2 + 7\mathrm{z} - 3 = (z-3)(z-1)^2$.

Como $\{e^{3t}, e^t, te^t\}$ é base do espaço de soluções, $x(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^t + \gamma te^t$. Para impor as condições iniciais, calculamos suas derivadas até segunda ordem: $x'(t) = 3\alpha e^{3t} + \beta e^t + \gamma(e^t + te^t)$ e $x''(t) = 9\alpha e^{3t} + \beta e^t + \gamma(2e^t + te^t)$. Impondo as condições iniciais, ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 9\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Resolvendo (por exemplo, por escalonamento), sai $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{3}{4}, \gamma = -\frac{3}{2}$.

Então

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^t - \frac{3}{2}te^t.$$

(b) (2.0) Ache uma solução particular de $x''' - 5x'' + 7x' - 3\mathrm{x} = e^t$.

Como 1 é autovalor e tem multiplicidade 2, e a potência que multiplica e^t é de ordem 0, a solução está entre as combinações lineares de uma única função: t^2e^t. Ou seja, estamos procurando $u(t) = ct^2e^t$.

Substituindo $u(t) = ct^2e^t$ no lado esquerdo da equação, todos os termos envolvendo te^t e t^2e^t se anulam, sobrando os termos em e^t. O que sobra é $-4ce^t$. Então $-4c = 1$, logo $c = -\frac{1}{4}$ e $u(t) = -\frac{1}{4}t^2e^t$.