SUB PROVA 1

1) (2.0) Escreva uma equação diferencial autônoma de primeira ordem, em uma variável (unidimensional) $x' = f(x)$ que seja compatível com as seguintes informações: (i) a função nula é solução; (ii) todas as soluções são monótonas não decrescentes; (iii) nenhuma solução troca de sinal; (iv) as soluções negativas tendem assintoticamente a zero, quanto $t \rightarrow +\infty$; (v) as soluções não-negativas são nulas até certo valor t_0 e crescentes para $t > t_0$.

2) (3.0) Determine para quais valores x_0 a solução do problema de Cauchy $x' = x^2 e^{-t}$, $x(0) = x_0$, está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. *Dica: sugere-se explicitar a solução primeiro e depois analisar seu intervalo maximal.*

3) (3.0) Resolva explicitamente $x' = -2x + t^2$, $x(0) = 3$, conferindo o resultado. *Observação: se quiser, pode deixar a solução em função de alguma integral, mesmo que ela seja factível.*

4) (2.0) Seja T o operador de Picard relativo ao problema de Cauchy $x' = -2x + t^2$, $x(0) = 0$. Calcule $\phi_1 = T\phi_0$ e $\phi_2 = T^2\phi_0$, se $\phi_0(t) \equiv 3$.

SUB PROVA 2

1) (2.0) Escreva a iteração de Euler generalizado para segunda ordem para o problema de Cauchy $x' = -2x + t^2$, $x(0) = 0$, com $h = 0.1$, e, com isso, calcule aproximações para $x(0.1)$, $x(0.2)$ e $x(0.3)$. *Observação: a última dá um pouco mais de trabalho de contas, mas é factível, não reclame. Posso emprestar minha calculadora, caso necessário.*

2) (2.0) Esboce o retrato de fases do sistema

$$\begin{cases} x' = -4 + x^2 \\ y' = y^2 \end{cases}$$

3) $U(x)$ é um polinômio de quarto grau com um máximo local entre dois mínimos locais, sendo o mínimo local da esquerda mais alto do que o mínimo local da direita. (a) **(2.0)** Esboce o retrato de fases de $x'' = -U'(x)$. (b) **(2.0)** Esboce o retrato de fase de $x'' = +U'(x)$.

4) (2.0) Uma equação diferencial em $\mathbb{R}^2$ é dada em coordenadas polares por $r' = f(r)$, $\theta' = 1$, em que

$$f(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ |(r-1)(r-2)|, & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

Esboce o retrato de fases dessa equação.

SUB PROVA 3

1) (4.0) Atribua a cada uma das equações diferenciais abaixo uma das seguintes propriedades:

(i) “ $\forall X_0, e^{tA}X_0 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ ”; (ii) “ $\forall X_0, e^{tA}X_0 \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ ”; (iii) “existe $X_0 \neq 0$ tal que $e^{tA}X_0 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ e existe $Y_0 \neq 0$ tal que $e^{tA}Y_0 \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ ”; (iv) nenhuma das anteriores. Caso (iv) ocorra, descreva o retrato de fases. Justifique suas respostas (mas não precisa escrever um tratado, eu só quero saber que informações levaram a elas).

(a) $X' = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ +6 & +4 \end{pmatrix} X$; (b) $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X$; (c) $X' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} X$; (d) $X' = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} X$
 (e) $X' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X$; (f) $X' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X$.

2) (2.0) Com o método de sua preferência, explicita a solução de $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X$.

3) (4.0) Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ache sua forma canônica de Jordan B , a matriz de semelhança S com B e obtenha e^{tA} usando $e^{tA} = S e^{tB} S^{-1}$.

SUB PROVA 4

1) (4.0) Ache a solução de $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$, com a condição inicial $X(t_0 = 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) (4.0) Ache a solução de $x'' + 2x' + 2x = e^{-t} \cos t$, com a condição inicial $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

3) (2.0) Com o auxílio da semelhança com a forma canônica de Jordan, esboce o retrato de fases de

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} X.$$