1ª Prova de MAT-231- Álgebra II para Licenciatura T47 - 13/05/2021

Nome e NUSP: _____

Questão 1 (3.0) Decida se os polinômios abaixo são irredutíveis e, quando não o for, decomponha-o em irredutíveis.

(a) $f(t) = 14t^5 - 18t^4 + 21t^2 + 9t + 60$ em $\mathbb{Q}[t]$.

(b) $g(t) = 2t^4 - 3t^3 - 4t + 6$ em $\mathbb{Q}[t]$ e em $\mathbb{R}[t]$.

(c) $h(t) = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 10$ em $\mathbb{R}[t]$ e em $\mathbb{C}[t]$ (**Obs.** $3 + i$ é raiz de $h(t)$).

1ª Prova de MAT-231- Álgebra II para Licenciatura T47 - 13/05/2021

Nome e NUSP: _____

Questão 2 (2.0) Faça a divisão de

$$f(t) = -3t^4 - t^3 + (3 + 6i)t^2 \quad \text{por} \quad g(t) = 3it^2 + it$$

1ª Prova de MAT-231- Álgebra II para Licenciatura T47 - 13/05/2021

Nome e NUSP: _____

Questão 3 (2.0) Considere o polinômio $f(t) = t^2 - t$.

- (a) Mostre que $f(t)$ tem apenas duas raízes em $\mathbb{Q}$ (indique quais as propriedades utilizadas).
- (b) Encontre um valor de m tal que $f(t)$ tenha mais do que duas raízes em $\mathbb{Z}_m$.
- (c) Mostre que se m for um número primo, então $f(t)$ terá apenas duas raízes em $\mathbb{Z}_m$ (indique quais as propriedades utilizadas).

1ª Prova de MAT-231- Álgebra II para Licenciatura T47 - 13/05/2021

Nome e NUSP: _____

Questão 4 (3.0) Considere o conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ com operações:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

- (a) Mostre que $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
- (b) Encontre o elemento inverso de $3 - \sqrt{2}$ (isto é, encontre $c + d\sqrt{2}$ em $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ tal que $(3 - \sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = 1$).
- (c) Ache o inverso de um elemento não nulo $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ em termos de a e b .
- (d) Mostre que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ não tem divisores de zero.