Instituto de Matemática e Estatística da USP - IME - USP

MAT 0236 - 3a. avaliação - 3^o semestre BCC

Prof. Thiago Grando

25/06/2018

Nome : GABARITO

N^o USP : ______

Assinatura : ______

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

Justificar todas as afirmações!
Boa Prova!

Q1. (2,5)

a) Determine se a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou diverge. Se convergir, encontre seu limite.

(1) $x_n = \dfrac{1}{8^n}\left(\dfrac{2n+8}{n+3}\right)^{3n}$.

(2) $x_n = \sqrt{n-\sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

(3) $x_n = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}$.

b) Se f é derivável no zero e $f(0)=0$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{1}{n}\right) = f'(0)$.

SOLUÇÃO

(1)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{8^n}\left(\frac{2n+8}{n+3}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{8^n}\left(\frac{2\cancel{n}(1+8/2n)}{\cancel{n}(1+3/n)}\right)^{3n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^{3n}}}{\cancel{8^n}}\cdot\left[\left(\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^n\right]^3 = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\overbrace{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}^{e^4}}{\underbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}_{e^3}}\right]^3 = \left(\frac{e^4}{e^3}\right)^3 = e^3,$$

pois $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x = e^4$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x = e^3$.

(2)
$$x_n = \sqrt{n-\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n-\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n-\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n-\sqrt{n}}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\cancel{n}-\sqrt{n}-\cancel{n}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}+1\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}$$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$,

temos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

(3) $x_n = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{1/n} = n^{\frac{1}{n^2}}$.

Defina $f(x) = x^{\frac{1}{x^2}}$, $x > 0$. Assim, $x_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{1/x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}\cdot \ln(x)} =$$

e^x é contínua i

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\cdot \ln(x)} \underset{\text{L.H.}}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2}} = e^0 = 1.$$

Ptto, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

b) Como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável, então $f'(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$

Em particular p/ $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot f(x).$$

Chame $t = \frac{1}{x}$. Logo, $\lim\limits_{t\to+\infty} t\cdot f\left(\frac{1}{t}\right) = f'(0)$.

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} t\cdot f\left(\frac{1}{t}\right) = f'(0)$.

Q2. (2,5) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida por $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$ para todo $n \geq 1$.

a) Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e ~~decrescente~~ monótona.

b) Mostre que (x_n) é convergente e encontre seu limite.

SOLUÇÃO:

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, $\exists\ L < \infty$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$. Para $n \geqslant 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$

$$\Leftrightarrow\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2+3}{x_n}\right) \Leftrightarrow 2x_n \cdot x_{n+1} = x_n^2+3.$$

Aplicando o limite,

$$2L^2 = \lim_{n\to+\infty} 2x_n \cdot x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(x_n^2+3) = L^2+3$$

$$L^2 = 3$$

$$L = \pm\sqrt{3}$$

1°: $x_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{n=1}$ $x_1 = 2 > 0$;

$\boxed{n=k}$ suponha que $x_k > 0$, p/ algum $k \in \mathbb{N}$. (H.I.)

$\boxed{n=k+1}$ mostraremos que $x_{k+1} > 0$:

$$x_k > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x_k > 0 \text{ e } \frac{3}{2x_k} > 0 \Rightarrow x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{3}{x_k}\right) >$$

a) (•) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente por $\sqrt{3}$:

Verifiquemos que $x_n \geq \sqrt{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Suponha por absurdo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m < \sqrt{3}$.

Logo,

$$\frac{1}{2}\left(x_{m-1} + \frac{3}{x_{m-1}}\right) = x_m < \sqrt{3} \iff \frac{1}{2}\,\frac{x_{m-1}^2 + 3}{x_{m-1}} < \sqrt{3} \iff$$

$$x_{m-1}^2 + 3 < 2\sqrt{3}\,x_{m-1} \iff x_{m-1}^2 - 2\sqrt{3}\,x_{m-1} + 3 < 0 \iff$$

$$(x_{m-1} - \sqrt{3})^2 < 0 \quad (\text{PROPOSIÇÃO FALSA}).$$

Logo não é verdade que $x_m < \sqrt{3}$. Ptto $x_n \geq \sqrt{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(••) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente:

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \iff x_{n+1} - x_n \leq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \iff$$

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) - x_n \leq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \iff -\frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n} \leq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \iff$$

$$x_n \geq \frac{3}{x_n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \iff x_n^2 \geq 3, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\overset{x_n > 0}{\iff} x_n \geq \sqrt{3}, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\text{PROP. VERDADEIRA}).$$

Ptto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente.

b) Pela letra a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e monótona, pelo TEO. 3 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. e seu limite $L=\sqrt{3}$.

Q3. (2,5) Determine se cada uma das séries abaixo converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n.ln^2(n+1)}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+2}{2n^3+1}$.

SOLUÇÃO:

a) o termo geral da série é $x_n = \dfrac{1+n^2}{n \cdot \ln^2(n+1)}$. Considere

$f(x) = \dfrac{1+x^2}{x \ln^2(x+1)}$, $x > 0$. Temos que $x_n = f(n)$. Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2}{x \cdot \ln^2(x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{x} + x}^{+\infty}}{\underbrace{\ln^2(x+1)}_{+\infty}} \overset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{2 \ln(x+1)}{x+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)(x+1)}{2 \ln(x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}^{+\infty}}{\underbrace{2\ln(x+1)}_{+\infty}} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{2}{x+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \left(\underbrace{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}_{\to 1}\right)\underbrace{(x+1)}_{\to +\infty} = +\infty \neq 0.$$ Portanto a série

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n \cdot \ln^2(n+1)}$ é divergente.

b) Comparação do limite com $y_n := \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}} = \lim_{n\to+\infty} n^{1-\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \ln(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ é cont.}}}{=} e^{\lim_{n\to+\infty} -\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'HOPITAL}}}{=} e^{0} = 1 > 0$$

Ptto, pelo TESTE DA COMPARAÇÃO DO LIMITE, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}$ é divergente.

c) Vamos verificar se $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2+2}{2n^3+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{2n^3+1}$ converg

Vamos aplicar o TESTE DA COMP. DO LIMITE c/ a sequência $y_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+2}{2n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n}{2n^3+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{\cancel{2/n^2}}}{2+\underset{\to 0}{\cancel{1/n^3}}} = \frac{1}{2} > 0.$$

Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{2n^3+1}$ diverge (pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge). Ptto

a série ñ é absolutamente convergente.

No entanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+2}{2n^3+1}$ converge, pois:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2}{2n^3+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{1/n}+\cancel{2/n^3}}{2+\cancel{1/n^3}} = 0 \quad e$$

considerando $f(x) = \frac{x^2+2}{2x^3+1}$, $x > 0$, temos que

$$f'(x) = \frac{-2x^4-12x^2+2x}{(2x^3+1)^2} < 0. \quad \text{Ou seja,}$$

$\left(\frac{n^2+2}{2n^3+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente. Pelo teste da série alternada a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+2}{2n^3+1}$ converge.

Ptto, a série acima é condicionalmente convergente.

Q4. (2,5) Encontre o raio e o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{4^n(n^2+1)}.$$

<u>SOLUÇÃO</u>:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)\,(x+1)^{n+1}}{4^{n+1}\left((n+1)^2+1\right)}\cdot\frac{4^n\,(n^2+1)}{n\,(x+1)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)\,\cancel{(x+1)^n}\,(x+1)\cdot\cancel{4^n}\,(n^2+1)}{\cancel{4^n}\cdot 4\,(n^2+2n+2)\cdot n\,\cancel{(x+1)^n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n}\;\frac{|x+1|}{4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}\cdot\frac{|x+1|}{4} =$$

$$= \frac{|x+1|}{4}.$$ Pelo Teste da razão

se $\frac{|x+1|}{4} < 1$, então a série converge absolutamente;

se $\frac{|x+1|}{4} > 1$, então a série diverge;

se $\frac{|x+1|}{4} = 1$, nada podemos afirmar.

$$\frac{|x+1|}{4} < 1 \iff |x+1| < 4 \iff -5 < x < 3$$

$$\frac{|x+1|}{4} > 1 \iff |x+1| > 4 \iff x+1 > 4 \text{ ou } x+1 < -4$$

$$x > 3 \text{ ou } x < -5$$

$$\frac{|x+1|}{4} = 1 \iff x = 3 \text{ ou } x = -5$$

Se $x = 3$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,\cancel{(3+1)^n}}{\cancel{4^n}(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$. Fazemos a comparação c/ a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (divergente)!

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{1/n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+1/n^2} = 1 > 0$. Pelo TESTE DA COMPARAÇÃO DO LIMITE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ é divergente.

Se $x = -5$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-5+1)^n}{4^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$. Logo,

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1/n}{1+1/n^2} = 0$. Considerando a função $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x > 1$, temos que $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} < 0$, quando $x > 1$, ou seja $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente. Pelo TESTE [DA] SÉRIE ALTERNADA, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ é convergente.

[Porta]nto o raio de convergência da série de potências [é R]$=4$ e o intervalo de convergência é $[-5, 3)$