Instituto de Matemática e Estatística da USP - IME - USP

MAT 0236 - Avaliação Substitutiva - 3^o semestre BCC

Prof. Thiago Grando

06/07/2018

Nome : GABARITO

N^o USP :

Assinatura :

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Justificar todas as afirmações!
Boa Prova!

Q1. (2,0)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, onde

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) = |xy|.$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_2(x,y) = \cos(\sqrt[5]{x^4+y^4}).$$

1,5 a) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

0,5 b) Calcule, caso exista $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$, onde $\mathbf{u} = (1,1)$.

SOLUÇÃO:

a) f é diferenciável em $(0,0)$ $\iff$ f_1 e f_2 são diferenciáveis em $(0,0)$.

$$D_1 f_1(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1((0,0)+te_1) - f_1(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f_1(t,0) - f_1(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Analogamente, $D_2 f_1(0,0) = 0$.

Defino $B_1 := [0,0]$.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1((0,0)+(h_1,h_2)) - f_1(0,0) - B_1\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\|(h_1,h_2)\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \overset{\to 0}{|h_1|} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{limitada } (*)} = 0 .$$

$$(*) \quad 0 \leq h_2^2 \leq h_1^2 + h_2^2 \implies 0 \leq \frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2} \leq 1 \implies 0 \leq \sqrt{\frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}$$

Logo f_1 é diferenciável em $(0,0)$.

Verifiquemos se f_2 é diferenciável em $(0,0)$:

$$D_1 f_2(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2((0,0)+te_1) - f_2(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{\cos(t^{4/5}) - 1}^{\to 0}}{\underbrace{t}_{\to 0}}$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{4}{5} \cdot t^{-1/5} \cdot \operatorname{sen}(t^{4/5})$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{4}{5} \cdot t^{-1/5} \cdot t^{4/5} \cdot \frac{\operatorname{sen}(t^{4/5})}{t^{4/5}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{-\frac{4}{5} \cdot t^{3/5}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(t^{4/5})}{t^{4/5}}}_{\to 1} = 0 \cdot 1 = 0$$

CONTINUAÇÃO Q1-a :

Analogamente, $D_2 f_2(0,0) = 0$.

Defino $E_2 := [0.0]$.

Assim $D_1 f_2(x,y) = \begin{cases} -\frac{4}{5} x^3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)^{1/5}}{(x^4+y^4)^{4/5}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e $D_2 f_2(x,y) = \begin{cases} -\frac{4}{5} y^3 \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)^{1/5}}{(x^4+y^4)^{4/5}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

$D_1 f_2$ e $D_2 f_2$ são contínuas, se $(x,y) \neq (0,0)$. (composta de funções contínuas). No $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{4}{5} x^3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)^{1/5}}{(x^4+y^4)^{4/5}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{4}{5} \cdot \frac{x^3}{(x^4+y^4)^{3/5}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)^{1/5}}{(x^4+y^4)^{1/5}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{4}{5} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^5}{x^4+y^4}\right)^{3/5}}_{\to 0\ (*)} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)^{1/5}}{(x^4+y^4)^{1/5}}}_{\to 1} = 0 = D_1 f_2(0,0)$$

$$(*): \quad \frac{x^5}{x^4+y^4} = x \cdot \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^4}}_{} \quad \text{limitada} \quad), \text{ pois}$$

$$0 \leq x^4 \leq x^4+y^4 \implies 0 \leq \frac{x^4}{x^4+y^4} \leq 1 \text{. Logo}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+y^4} = 0 .$$

Com isso $D_1 f_2$ é contínua em $(0,0)$. Analogamente $D_2 f_2$ é contínua em $(0,0)$. Como observado anteriormente, concluímos que $D_1 f_2$ e $D_2 f_2$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Ptto f_2 é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Com isso f_2 é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Ptto, f_1 e f_2 são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e logo f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

b) Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pelo TEOREMA 1, todas as derivadas direcionais existem em $(0,0)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = Df(0,0) \cdot u , \quad \forall\, u \neq (0,0)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Q2. (2,0) Determine os valores de máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2$ sobre o compacto $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4 \text{ e } z = x + y - 2\}$.

SOLUÇÃO: Como C é compacto e f é contínua, o teorema de Weierstrass nos diz que f atinge seus extremos em C.

$$g(x,y,z) := x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$$
$$h(x,y,z) := x + y - z - 2$$

. Note que g e h são funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Defina

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \ g(x,y,z) = 0 \ \text{e} \ h(x,y,z) = 0\}$$

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$$
$$\nabla h(x,y,z) = (1, 1, -1)$$

Note que $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $\forall (x,y,z) \in B$, pois não é verdade que $\nabla g(x,y,z) \,//\, \nabla h(x,y,z)$ (verificar!).

Se (x,y,z) for ponto de máximo ou de mínimo local de f em B, por Lagrange, $\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$$

Ou seja,

$$\begin{vmatrix} x & -4y & 4z \\ x & y & 2z \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies 5y(x+2z)=0$$

$\Rightarrow y=0$ ou $x=-2z$.

Se $y=0$, então $3x^2-8x+4=0$. Ou seja,

$x=2$ ou $x=\frac{2}{3}$.

Se $x=2$, então $z=0$, logo $(2,0,0)=(x,y,z)$

Se $x=\frac{2}{3}$, então $z=\frac{-4}{3}$, logo $\left(\frac{2}{3},0,\frac{-4}{3}\right)=(x,y,z)$

Se $x=-2z$ então $15z^2+12z=0$, logo $z=0$ ou $z=\frac{-12}{15}=\frac{-4}{3}$.

Se $z=0$, então $(x,y,z)=(0,2,0)$;

Se $z=\frac{-4}{3}$, então $(x,y,z)=\left(-\frac{8}{3},-2,\frac{-4}{3}\right)$;

Com isso,
$$\begin{cases} f(2,0,0)=4=f(2/3,0,-4/3); \\ f(0,2,0)=-16; \\ f(-8/3,-2,-4/3)=-16/3. \end{cases}$$

CONTINUAÇÃO Q2:

Vamos encontrar pontos que satisfazem

$x^2+y^2+2z^2 < 4$ e $z = x+y-2$

$\nabla f(x,y,z) = \lambda\,(1,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ x & -4y & 2z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{8}{5},\ y = -\frac{2}{5} \text{ e } z = \frac{-4}{5}.$$

Porém $\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)^2 = 4$. Logo não existem pontos em C que satisfazem essa condição.

Ptto, $(0,2,0)$ é pto de mínimo de f em C;
$(2,0,0)$, $(2/3, 0, -4/3)$ são ptos de máximo de f em C;

4 é o valor máximo de f em C;
-16 é " " mínimo de f " ".

Q3. (2,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x+y, 2xy)$.

0,8 a) Mostre que o conjunto imagem de f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2y \geq 0\}$ $:= A$

0,8 b) Mostre que f é inversível numa vizinhança de $(2,-1)$, com inversa de classe C^1. Encontre uma fórmula explicita pra f^{-1} numa vizinhança de $f(2,-1) = (1,-4)$.

0,4 c) Calcule $Df^{-1}(1,-4)$.

SOLUÇÃO:

a) $\operatorname{Im}(f) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 ; (u,v) = f(x,y), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$\operatorname{Im}(f) \subset A$:

Se $(u,v) \in \operatorname{Im}(f)$, então $(u,v) = f(x,y)$, p/ algum $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ou seja, $u = x+y$ e $v = 2xy$. Logo

$$u^2 - 2v^2 = (x+y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0.$$

Logo, $(u,v) \in A$.

$A \subset \operatorname{Im}(f)$:

$(u,v) \in A \implies u^2 - 2v^2 \geq 0.$

Se $v = 0$, então $f(u,v) = f(u,0) = (u,0)$

Logo $(u,0) \in \operatorname{Im}(f)$.

Se $v \neq 0$, $y = \dfrac{v}{2x}$ e $u = x + \dfrac{v}{2x}$. Log

$x^2 - ux + \dfrac{v}{2} = 0$. Ou seja, $x = \dfrac{u \pm \sqrt{u^2 - 2v}}{2}$.

Assim $f\left(\dfrac{u+\sqrt{u^2-2v}}{2}, \dfrac{v}{u+\sqrt{u^2-2v}}\right) = (u,v)$ e

$f\left(\dfrac{u-\sqrt{u^2-2v}}{2}, \dfrac{v}{u-\sqrt{u^2-2v}}\right) = (u,v)$. Ptto $(u,v) \in Im(f$

Ptto, $Im(f) = A$.

b) $Df(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$;

$Df(2,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Logo,

$\det Df(2,-1) = 4+2 = 6 \neq 0$. Ptto, $Df(2,-1)$ é não-singular. É imediato verificar que f é de classe C^1. Pelo TEOREMA 9, $\exists$ U vizinhança de $(2,-1)$ e V vizinhança de $f(2,-1)$ tq $f: U \to V$ é bijetora e sua inversa $f^{-1}: V \to U$ é de classe C^1.

CONTINUAÇÃO Q3-b:

Note que da parte a, a inversa $f^{-1}: V \to U$ é dada por:

$$f^{-1}(u,v) = \left(\frac{u+\sqrt{u^2-2v}}{2}, \frac{u-\sqrt{u^2-2v}}{2} \right).$$

c) $$Df^{-1}(1,-4) = \left[Df(2,-1) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Q4. (2,0) Determine se cada uma das séries abaixo converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

0,6 a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n)}$.

0,7 b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$.

0,7 c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

SOLUÇÃO: $x_n := \dfrac{1}{(\ln(n))^2}$ e $y_n := \dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(\ln(n))^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \overset{L.H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Logo, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{(\ln n)^2}$, $\forall\, n \geq n_0$.

Ou seja $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$. Ptto, pelo TESTE da COMPARAÇÃO, a série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$ é divergente.

b) A função $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ é decrescente para $x \geq 2$. Logo,

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\ln|\ln b| - \ln|\ln 2| \right) = \infty.$$

Pelo TESTE da INTEGRAL, a série diverge.

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right)^2 = 1.$$ Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, temos que a série em módulo diverge.

Considerando $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x > 0$

temos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. e f é decrescente (Verifica

Pelo TESTE da SÉRIE ALTERNADA a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

converge. Ptto, uma série é condicionalmente convergente

Q5. (2,0) Encontre os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^{n+1}}(x-3)^n.$$

SOLUÇÃO ; $\quad x_n := \dfrac{3n-2}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}(x-3)^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+1)\,|x-3|^{n+1}}{(n+2)^2 \cdot 2^{n+2}} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}{(3n-2)\cdot |x-3|^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \cdot \frac{|x-3|}{2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3+1/n}{3+2/n}\right) \cdot \left(\frac{1+1/n}{1+2/n}\right)^2 \cdot \frac{|x-3|}{2} = \frac{|x-3|}{2}.$$

Logo, se

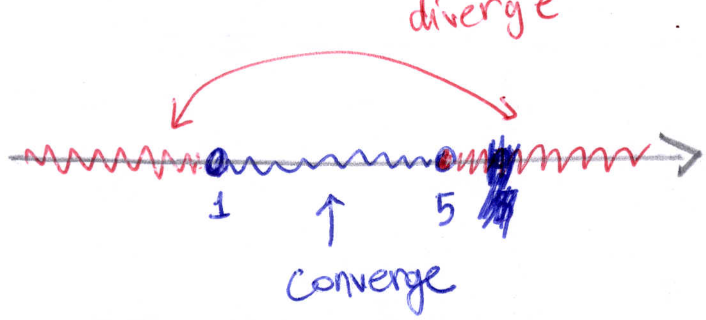
$$\begin{cases} |x-3| < 2, & \text{a série converge absolutamente;} \\ |x-3| > 2, & \text{a série diverge;} \\ x = 1 \text{ ou } x = 5, & \text{nada podemos afirmar.} \end{cases}$$

Se $x = 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n-2)}{(n+1)^2 \cdot 2}$ converge pelo teste da Série alternada. (Verificar!)

Se $x = 5$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 \cdot 2}$ diverge, pois pelo teste da comparação do limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3n-2}{(n+1)^2 \cdot 2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 - 2n}{(n+1)^2 \cdot 2} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3 - \frac{2}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot 2} = \frac{3}{2} > 0.$$



CONVERGE $\to [1, 5)$

DIVERGE $\to (-\infty, 1) \cup [5, +\infty)$