Resolução da Prova 2

1. Seja G um grupo.

   (a) Mostre que se H é um subgrupo normal de G com $|H| = 2$, então $H \subseteq Z(G)$. (Lembre que $Z(G) = \{z \in G : za = az$, para todo $a \in G\}$.)

   (b) Sejam K e L subgrupos normais de G com $K \subseteq L$ e $[L : K] = 2$. Mostre que $x^{-1}a^{-1}xa \in K$, para todos $x \in L$ e $a \in G$.

   (c) Dê um contra-exemplo para a afirmação do item (a) com $|H| = 3$.

Solução. (a) Escreva $H = \{e_G, h\}$. Como $H \lhd G$, para cada $g \in G$, temos $ghg^{-1} \in H$. Há duas possibilidades: $ghg^{-1} = e_G$ ou $ghg^{-1} = h$. No primeiro caso, teríamos $h = g^{-1}(ghg^{-1})g = g^{-1}e_G g = e_G$, o que é impossível; logo, para todo $g \in G$, temos $ghg^{-1} = h$, equivalentemente, $gh = hg$, ou seja $h \in Z(G)$. Como $e_G \in Z(G)$, segue $H \subseteq Z(G)$. (b) Sabemos que $L/K \lhd G/K$ (isso foi visto na demonstração do Terceiro Teorema do Isomorfismo). Ainda, $|L/K| = [L : K] = 2$. Pelo item anterior, segue $L/K \subseteq Z(G/K)$. Portanto, para todos $x \in L, a \in G$, temos $(xK)(aK) = (aK)(xK)$, ou seja, $xaK = axK$, o que é equivalente a $x^{-1}a^{-1}xa = (ax)^{-1}(xa) \in K$. (c) Seja $\sigma \in S_3$ um 3-ciclo e seja $H = \langle \sigma \rangle \leq S_3$. Então $|H| = 3$ e como $[S_3 : H] = \dfrac{|S_3|}{|H|} = \dfrac{6}{3} = 2$, segue $H \lhd S_3$. Mas $H \not\subseteq Z(S_3)$, pois, conforme vimos, $|Z(S_3)| = 1$.

2. Sejam G_1 e G_2 grupos e seja $\varphi\colon G_1 \to G_2$ um homomorfismo. Seja N_2 um subgrupo de G_2 e seja $N_1 = \varphi^{-1}(N_2)$. (Isto é, $N_1 = \{a \in G_1 : \varphi(a) \in N_2\}$).

   (a) Mostre que se N_2 é um subgrupo normal de G_2, então N_1 é um subgrupo normal de G_1.

   (b) Mostre que se φ for sobrejetor, então $\dfrac{G_1}{N_1} \cong \dfrac{G_2}{N_2}$.

Solução. (a) Considere a composta $\psi = \pi \circ \varphi\colon G_1 \to \dfrac{G_2}{N_2}$, em que $\pi\colon G_2 \to \dfrac{G_2}{N_2}$ denota a projeção canônica (isto é, $\pi(b) = bN_2$, para todo $b \in G_2$). Sabemos que ψ é um homomorfismo. Além disso, $\operatorname{Ker}\psi = N_1$, pois, dado $a \in G_1$, temos $a \in \operatorname{Ker}\psi \Leftrightarrow \psi(a) = e_{G_2/N_2} = e_{G_2}N_2 \Leftrightarrow \varphi(a)N_2 = e_{G_2}N_2 \Leftrightarrow \varphi(a) \in N_2 \Leftrightarrow a \in \varphi^{-1}(N_2) = N_1$. Logo, $N_1 = \operatorname{Ker}\psi \lhd G_1$. (b) Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, a função $\overline{\psi}\colon \dfrac{G_1}{N_1} \to \dfrac{G_2}{N_2}$, dada por $\overline{\psi}(aN_1) = \psi(a) = \varphi(a)N_2$ é um homomorfismo injetor. Resta, portanto, mostrar que $\overline{\psi}$ é sobrejetor quando φ é. Suponha, então, que φ seja sobrejetor e tome $\xi \in G_2/N_2$. Como π é sobrejetor, existe $b \in G_2$ tal que $\pi(b) = \xi$. Como φ é sobrejetor, existe $a \in G_1$ tal que $\varphi(a) = b$. Assim $\overline{\psi}(aN_1) = \varphi(a)N_2 = bN_2 = \pi(b) = \xi$. Segue que $\overline{\psi}$ é, também, sobrejetor. Logo, se φ for sobrejetor, $\overline{\psi}$ será um isomomorfismo.

3. Seja n um inteiro positivo e seja S_n o grupo simétrico em $\{1,2,\dots,n\}$.

   (a) Mostre que dada uma permutação τ e um ciclo $(i_1\ i_2\ \dots\ i_r)$ em S_n, tem-se
   $$\tau(i_1\ i_2\ \dots\ i_r)\tau^{-1} = \big(\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \dots\ \tau(i_r)\big).$$

   (b) Seja $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq \mathrm{id}$, e seja
   $$\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_s$$
   a fatoração de σ como produto de ciclos de comprimento ≥ 2 disjuntos. Para cada $k = 2,\dots,n$, defina o seguinte subconjunto de $\{1,2,\dots,n\}$:
   $$B_k = \{a : a \text{ é movido por algum } \alpha_i \text{ de comprimento } k\}.$$
   (Em outras palavras, B_k é o conjunto dos elementos que aparecem em algum k-ciclo na fatoração de σ.)
   Mostre que se $\tau \in S_n$ é tal que $\tau\sigma = \sigma\tau$, então $\tau(B_k) = B_k$, para todo $k = 2,\dots,n$.

Solução. (a) Sejam $\beta = \tau(i_1\ i_2\ \dots\ i_r)$ e $\gamma = \big(\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \dots\ \tau(i_r)\big)\tau$. Mostremos que $\beta = \gamma$. Se $j \in \{1,\dots,r-1\}$, então $\beta(i_j) = \tau(i_{j+1}) = \gamma(i_j)$, e $\beta(i_r) = \tau(i_1) = \gamma(i_r)$. Agora, se $k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i_1,\dots,i_r\}$, então $\beta(k) = \tau(k) = \gamma(k)$. Logo, $\beta = \gamma$ e, portanto, $\tau(i_1\ i_2\ \dots\ i_r)\tau^{-1} = \beta\tau^{-1} = \gamma\tau^{-1} = \big(\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \dots\ \tau(i_r)\big)$. (b) Fixe $k = 2,\dots,n$. Se $B_k = \emptyset$, então, trivialmente, $\tau(B_k) = B_k$. Suponha que $B_k \neq \emptyset$ e tome $a \in B_k$. Como os α_i comutam, posso supor que $\alpha_1 = (a\ \ b\ \ \dots)$ é um k-ciclo. Assim, pelo item anterior, $\tau\alpha_1\tau^{-1} = (\tau(a)\ \ \tau(b)\ \ \dots)$ é um k-ciclo, e

$$\begin{aligned}
\tau\sigma\tau^{-1} &= \tau\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\tau^{-1}\\
&= (\tau\alpha_1\tau^{-1})(\tau\alpha_2\tau^{-1})\dots(\tau\alpha_s\tau^{-1})\\
&= (\tau(a)\ \ \tau(b)\ \ \dots)(\tau\alpha_2\tau^{-1})\dots(\tau\alpha_s\tau^{-1})
\end{aligned}$$

é a fatoração de $\tau\sigma\tau^{-1}$ em produto do ciclos de comprimento ≥ 2 disjuntos (uma vez que, pelo item anterior, se α_i é um r-ciclo, então $\tau\alpha_i\tau^{-1}$ também é, e eles são disjuntos, pois τ é bijetora.) Agora, como $\tau\sigma = \sigma\tau$, segue que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$ e, portanto, essa também é a fatoração de σ como produto de ciclos de comprimento ≥ 2 disjuntos. Pela unicidade, segue que $(\tau(a)\ \ \tau(b)\ \ \dots)$ é um dos α_i que são k-ciclos. Portanto, $\tau(a) \in B_k$. Mostramos, assim que $\tau(B_k) \subseteq B_k$. A igualdade segue do fato de τ ser injetora e B_k ser finito.

4. Seja G um grupo, seja H um subgrupo de G e seja $\mathcal{X}$ o conjunto das classes laterais à esquerda de H em G. Denote por $S(\mathcal{X})$ o grupo das permutações em $\mathcal{X}$.

   (a) Mostre existe um homomorfismo $\varphi\colon G \to S(\mathcal{X})$ que satisfaz $\varphi(g)(\xi) = g\xi$, para todos $g \in G$ e $\xi \in \mathcal{X}$.

   (b) Mostre que $\ker(\varphi) = \bigcap\limits_{a \in G} aHa^{-1}$.

   (c) Conclua que se G é um grupo simples que tem um subgrupo de índice finito $n \geq 2$, então G é isomorfo a um subgrupo de S_n.

Solução. (a) Dado $g \in G$, considere a função $\varphi_g \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definida por $\varphi_g(\xi) = g\xi$, para todo $\xi \in \mathcal{X}$. Note que, como todo elemento de $\mathcal{X}$ é uma classe lateral à esquerda de H em G, dado $\xi \in \mathcal{X}$, existe $a \in G$ tal que $\xi = aH$. Portanto, $g\xi = g(aH) = (ga)H \in \mathcal{X}$, ou seja, φ_g é, de fato, uma função de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$. Além disso, para todo $g \in G$, $\varphi_g \in S(\mathcal{X})$, pois φ_g é injetora (se $gaH = \varphi_g(aH) = \varphi_g(bH) = gbH$, então $b^{-1}a = (gb)^{-1}ga \in H$ e, portanto, $aH = bH$) e sobrejetora (dado $aH \in \mathcal{X}$, tem-se $aH = gg^{-1}aH = \varphi_g(g^{-1}aH)$). Finalmente, a função $\varphi \colon G \to S(\mathcal{X})$, definida por $\varphi(g) = \varphi_g$, para todo $g \in G$, é um homomorfismo, uma vez que, dados $g, h \in G$, temos, para todo $\xi \in \mathcal{X}$, $\varphi(gh)(\xi) = \varphi_{gh}(\xi) = (gh)\xi = g(h\xi) = \varphi_g(\varphi_h(\xi)) = \big(\varphi(g) \circ \varphi(h)\big)(\xi)$. (b) Seja $g \in G$. Então,

$$\begin{aligned} g \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(g) = e_{S(\mathcal{X})} \\ &\iff \varphi_g = \mathrm{id} \\ &\iff \varphi_g(aH) = \mathrm{id}(aH), \text{ para todo } a \in G \\ &\iff gaH = aH, \text{ para todo } a \in G \\ &\iff a^{-1}ga \in H, \text{ para todo } a \in G \\ &\iff g \in aHa^{-1}, \text{ para todo } a \in G \\ &\iff g \in \bigcap_{a \in G} aHa^{-1} \end{aligned}$$

(c) Seja $H \leq G$ com $[G : H] = n$, e seja $\varphi \colon G \to S(\mathcal{X})$ o homomorfismo do item (a). Como $|\mathcal{X}| = [G : H] = n$, segue que existe um isomorfismo $\rho \colon S(\mathcal{X}) \to S_n$. Seja $\psi = \rho \circ \varphi \colon G \to S_n$. Dado $g \in G$, temos $g \in \operatorname{Ker}(\psi)$ se, e somente, se $\rho(\varphi(g)) = \psi(g) = e_{S_n}$. Como ρ é injetor, segue que essa condição é equivalente a $\varphi(g) = e_{S(\mathcal{X})}$, ou seja, $\operatorname{Ker}(\psi) = \operatorname{Ker}(\varphi) = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$, pelo item (b). Mas, $\bigcap_{a \in G} aHa^{-1} \subseteq H \neq G$, uma vez que $n > 1$. Como G é simples, é necessário que $\operatorname{Ker}(\psi) = \{e_G\}$, o que implica que ψ é injetor. Daí segue que G é isomorfo a $\operatorname{Im}(\psi) \leq S_n$.