Resolução da Prova 3

1. Sejam H e K grupos, e seja $G = H \times K$ o produto direto de H e K.

   (a) Mostre que as funções

   $$\begin{array}{rcl} \pi_H \colon G & \longrightarrow & H \\ (h,k) & \longmapsto & h \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \pi_K \colon G & \longrightarrow & K \\ (h,k) & \longmapsto & k \end{array}$$

   são homomorfismos sobrejetores.

   (b) Seja L um grupo e sejam $\phi_H \colon L \to H$ e $\phi_K \colon L \to K$ homomorfismos. Mostre que existe um único homomorfismo $\psi \colon L \to G$ que satisfaz $\pi_H \circ \psi = \phi_H$ e $\pi_K \circ \psi = \phi_K$. Ainda, mostre que $\ker \psi = \ker \phi_H \cap \ker \phi_K$.

   O seguinte diagrama talvez ajude a visualizar o contexto:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\phi_H"'] \arrow[d, dotted, "\psi"] \arrow[dr, "\phi_K"] & \\ H & G \arrow[l, "\pi_H"] \arrow[r, "\pi_K"'] & K \end{tikzcd}$$

Solução. (a) A função π_H é um homomorfismo, pois $\pi_H\big((h_1,k_1)(h_2,k_2)\big) = \pi_H\big((h_1h_2,k_1k_2)\big) = h_1h_2 = \pi_H\big((h_1,k_1)\big)\pi_H\big((h_2,k_2)\big)$, para todos $(h_1,k_1),(h_2,k_2) \in G$. E π_H é sobrejetor, pois, para qualquer $h \in H$, tem-se, por exemplo, $h = \pi_H\big((h,e_K)\big)$. O argumento para π_K é análogo. (b) Defina a função $\psi \colon L \to G$ por $\psi(x) = \big(\phi_H(x), \phi_K(x)\big)$, para todo $x \in L$. (Note que o contradomínio de ψ é, de fato, G.) Então ψ é um homomorfismo, pois

$$\begin{aligned} \psi(xy) &= \big(\phi_H(xy), \phi_K(xy)\big) \\ &= \big(\phi_H(x)\phi_H(y), \phi_K(x)\phi_K(y)\big), \text{ pois } \phi_H \text{ e } \phi_K \text{ são homomorfismos} \\ &= \big(\phi_H(x), \phi_K(x)\big)\big(\phi_H(y), \phi_K(y)\big) \\ &= \psi(x)\psi(y), \end{aligned}$$

para todos $x, y \in L$. As condições sobre ψ estão satisfeitas, pois, dado $x \in L$, tem-se $(\pi_H \circ \psi)(x) = \pi_H\big(\psi(x)\big) = \pi_H\big((\phi_H(x), \phi_K(x))\big) = \phi_H(x)$, e similarmente para $\pi_K \circ \psi = \phi_K$. Para mostrar a unicidade, suponha que $\varphi \colon L \to G$ seja um homomorfismo que satisfaz $\pi_H \circ \varphi = \phi_H$ e $\pi_K \circ \varphi = \phi_K$, Então, para cada $x \in L$, temos $\varphi(x) \in G$ e, portanto, existem $h_x \in H$ e $k_x \in K$ tais que $\varphi(x) = (h_x, k_x)$. Logo, $h_x = \pi_H\big((h_x,k_x)\big) = \pi_H\big(\varphi(x)\big) = \phi_H(x)$. Similarmente, $k_x = \phi_K(x)$. Portanto, $\varphi(x) = (h_x,k_x) = \big(\phi_H(x), \phi_K(x)\big) = \psi(x)$. Assim, $\varphi = \psi$. Finalmente, dado $x \in L$, temos $x \in \ker \psi \Leftrightarrow \psi(x) = e_G = (e_H, e_K) \Leftrightarrow \big(\phi_H(x), \phi_K(x)\big) = (e_H, e_K) \Leftrightarrow x \in \ker \phi_H \cap \ker \phi_K$.

2. Seja G um grupo finito que age em um conjunto finito X. Considere o seguinte subconjunto de X:

$$X_G = \{x \in X : g \cdot x = x, \text{para todo } g \in G\}.$$

   (a) Mostre que, dado $x \in X$, tem-se que $x \in X_G$ se, e somente se, $|\mathrm{O}(x)| = 1$. (*Aqui,* $\mathrm{O}(x)$ *denota a órbita de* x *sob a ação de* G.)

   (b) Mostre que se $|G| = p^r$, para algum primo p e $r \geq 1$, então $|X| \equiv |X_G| \pmod{p}$.

(c) Use o item anterior para mostrar que se s denota o número de subgrupos de um p-grupo finito G, sendo p um primo, e n denota o número de subgrupos normais de G, então $s \equiv n \pmod{p}$.

Solução. (a) Dado $x \in X$, tem-se $x \in X_G \Leftrightarrow g \cdot x = x, \forall g \in G \Leftrightarrow \mathrm{O}(x) = \{x\} \Leftrightarrow |\mathrm{O}(x)| = 1$. (b) Sejam $x_1, \ldots, x_n \in X$ representantes das órbitas distintas não unitárias da ação de G em X. Então X se escreve como a seguinte união disjunta de subconjuntos

$$X = \left(\bigcup_{\substack{x \in X \\ |\mathrm{O}(x) = 1|}} \mathrm{O}(x) \right) \cup \mathrm{O}(x_1) \cup \cdots \cup \mathrm{O}(x_n).$$

Mas, pelo item (a),

$$\bigcup_{\substack{x \in X \\ |\mathrm{O}(x) = 1|}} \mathrm{O}(x) = X_G.$$

Assim, tem-se a seguinte união disjunta: $X = X_G \cup \mathrm{O}(x_1) \cup \cdots \cup \mathrm{O}(x_n)$, donde segue $|X| = |X_G| + \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{O}(x_i)|$. Agora, para cada $i = 1, \ldots, n$, tem-se $1 < |\mathrm{O}(x_i)| = [G : \mathrm{Stab}(x_i)]$, que é um divisor de $|G| = p^r$. Assim, p divide $|\mathrm{O}(x_i)|$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Daí segue $|X| \equiv |X_G| \pmod{p}$. (c) Seja X o conjunto de todos os subgrupos de G; faça G agir em X por conjugação: $g \cdot H := gHg^{-1}$. (Note que isso, de fato, define uma ação de G em X.) Dado $H \in X$, tem-se $H \in X_G$ se, e somente se, $gHg^{-1} = H$, para todo $g \in G$. Ou seja, X_G é o conjunto de todos os subgrupos normais de G. Temos $s = |X|$ e $n = |X_G|$. Do item (b), segue $s \equiv n \pmod{p}$.

3. Seja G um grupo finito, seja S um subgrupo de Sylow de G e seja H um subgrupo de G tal que $N_G(S) \subseteq H$. (*Aqui, $N_G(S)$ denota o normalizador de S em G, isto é, $N_G(S) = \{g \in G : gSg^{-1} = S\}$.*)

   (a) Mostre que, para todo $x \in N_G(H)$, xSx^{-1} é um subgrupo de Sylow de H.

   (b) Mostre que $N_G(H) = H$.

Solução. (a) Dado $x \in N_G(H)$, tem-se $xSx^{-1} \subseteq xHx^{-1} = H$. Portanto, xSx^{-1} é um subgrupo de H e $|xSx^{-1}| = |S|$. Segue que xSx^{-1} é um subgrupo de Sylow de H, uma vez que tem ordem potência maximal de um primo que divide a ordem de G e, portanto, a de H. (b) A inclusão $H \subseteq N_G(H)$ é clara. Tome, agora, $x \in N_G(H)$. Pelo item (a), xSx^{-1} é um subgrupo de Sylow de H. Como $S \subseteq N_G(S) \subseteq H$, S também é um subgrupo de Sylow de H, associado ao mesmo primo que xSx^{-1}, pois eles têm a mesma ordem. Pelo Teorema de Sylow, S e xSx^{-1} são conjugados em H, isto é, existe $h \in H$ tal que $xSx^{-1} = hSh^{-1}$. Daí, segue $(h^{-1}x)S(h^{-1}x)^{-1} = S$. Portanto, $h^{-1}x \in N_G(S) \subseteq H$. Portanto, $x \in hH = H$. Logo, $N_G(H) \subseteq H$.

4. (a) Mostre que todo grupo de ordem 12 tem um subgrupo de Sylow que é normal.

(b) Sejam p, q primos distintos e seja G um grupo com $|G| = p^2q$. Mostre que G tem um subgrupo de Sylow que é normal.

Solução. (a) Seja G um grupo com $|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$. Sabemos, pelo Teorema de Sylow, que $n_3 \equiv 1 \pmod 3$ e que $n_3 \mid 4$. Há, assim, apenas duas possibilidades: ou $n_3 = 1$, e, neste caso, o 3-Sylow é normal, ou $n_3 = 4$. Vejamos que, neste segundo caso, o 2-Sylow é normal. De fato, suponha que $n_3 = 4$, ou seja, que G tenha quatro 3-subgrupos de Sylow. Como a ordem de cada 3-Sylow é 3, a interseção de dois 3-Sylows distintos é o subgrupo trivial $\{e_G\}$. Além disso, cada elemento diferente de e_G em um 3-Sylow tem ordem 3. Assim, os quatro 3-Sylows de G fornecem $4(3-1) = 8$ elementos de ordem 3 em G. Os 2-Sylows de G têm ordem $2^2 = 4$ e, portanto, seus elementos não têm ordem 3. Seja S um 2-Sylow de G. Se houvesse mais do que um 2-Sylow em G, teríamos, ainda, mais pelo menos um elemento em G, além dos 8 elementos de ordem 3 e dos 4 elementos de S; isso resultaria em, pelo menos, $8 + 4 + 1 = 13$ elementos distintos em G, o que é impossível. Logo, se $n_3 = 4$, então $n_2 = 1$, e o 2-Sylow é normal. (b) Há dois casos a considerar: $p > q$ ou $p < q$. Suponha, primeiramente, que $p > q$. Neste caso, como $n_p \equiv 1 \pmod p$ e $n_p \mid q$, segue que $n_p = 1$ e, portanto, o p-Sylow é normal. Consideremos, agora, o caso $p < q$. Neste caso, como $n_q \mid p^2$, seque que $n_q = 1$ ou $n_q = p$ ou $n_q = p^2$. No primeiro caso, o q-Sylow é normal. O caso $n_q = p$ não pode ocorrer, uma vez que, como sabemos, $n_q \equiv 1 \pmod q$ e $p < q$. Resta o caso $n_q = p^2$. Neste caso, como $n_q \equiv 1 \pmod q$, segue $q \mid p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Como q é primo, $q \mid p - 1$ ou $q \mid p + 1$. O primeiro caso não pode ocorrer, uma vez que $q > p > 1$. No segundo caso, teríamos $q \leq p + 1$, mas como $q \geq p + 1$, é necessário que $q = p + 1$. Como p e q são primos, isso só ocorre quando $p = 2$ e $q = 3$, e esse caso já foi tratado no item (a).