MAP0217 - Cálculo Diferencial
MAT0311 - Cálculo Diferencial e Integral V
1a. Prova - Peso 1

Entrega: Até 22/08/2018 (4a. feira) $2^{\underline{\text{O}}}$ Semestre de 2018

REGRAS DO JOGO:
1. Na nota entrará pelo menos duas questões de cada parte.
2. Para nota serão consideradas questões cujos valores somem no máximo 10 pontos. Para compor esses 10 pontos, será considerada a melhor escolha para cada aluno.

BOA PROVA!

PARTE I - Topologia do $\mathbf{R}^n$

Questão 1 *(1 ponto)* Mostre que em $\mathbf{R}^2$ o "quadrado sem contorno" $(0,1)\times(0,1)$ é um subconjunto aberto.

Questão 2 *(1 ponto)* Mostre que se $F\subset\mathbf{R}^n$ é fechado e $A\subset\mathbf{R}^n$ é aberto, então $F\setminus A$ é fechado.

Questão 3 *(2 pontos)* Na tabela abaixo, M é um espaço métrico e X é um subconjunto de M. Considere $\cup_n=\cup_{n\in\mathbf{N}}$. Complete as lacunas com os subconjuntos correspondentes:

M	$X\subset M$	X°	∂X	X'	$\overline{X}$	X é aberto?	X é fechado?
$\mathbf{R}$	$\cup_n\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right)$						
$\mathbf{R}$	$\cup_n\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right]$						
$\mathbf{R}^2$	$\cup_n B_{\frac{1}{2n}}[0]\setminus B_{\frac{1}{2n+1}}(0)$						

Questão 4 *(1 ponto)* Decida se cada subconjunto de $\mathbf{R}^2$ abaixo tem ou não algum ponto de acumulação. Justifique sua resposta.

(a) $\{(1/n,1/2n)\ |n\in\mathbf{N}\}$. (b) $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. (c) $A\subset\mathbf{R}$ aberto, não vazio.

PARTE II - Topologia de Espaços Métricos

Questão 5 *(1 ponto)* Sejam (M,d) um espaço métrico e $H\subset M$ aberto não vazio, e $p\in H$. Mostre que $H\setminus\{p\}$ é aberto.

Questão 6 *(1 ponto)* Seja $M=\mathbf{R}$ com a métrica discreta $d_*(x,y)=\begin{cases}1 & \text{se } x\neq y\\ 0 & \text{se } x=y\end{cases}$

Considere $Y=\cup_{n\in\mathbf{N}}\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right)\subset M$.

(a) Quem são $Y^\circ,\partial Y,Y'$, e $\overline{Y}$ nesse exemplo?

(b) Y é fechado? Y é aberto?

Questão 7 *(1 ponto)* Seja (M, d) um espaço métrico, e $A \subset M$ aberto, não vazio. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique:

(a) *A é uma união de bolas abertas.*

(b) *A é uma união de bolas fechadas.*

Questão 8 *(2 pontos)* Seja $M = \mathbf{R}^2$ com a métrica $\widetilde{d}(x, y) = |x_1 - y_1| + d_*(x_2, y_2)$, onde $d_*(t, s) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq s \\ 0 & \text{se } t = s \end{cases}$ é a métrica discreta em $\mathbf{R}$.

Considere os seguintes subconjuntos de M:
$A = (0, 1) \times (0, 1)$ $\quad B = [0, 1] \times [0, 1]$ $\quad C = (0, 1) \times [0, 1]$ $\quad D = [0, 1] \times (0, 1)$
$E = \mathbf{R} \times (0, 1)$ $\quad F = (0, 1) \times \mathbf{R}$ $\quad G = \mathbf{R} \times [0, 1]$ $\quad H = [0, 1] \times \mathbf{R}$

(a) Determine quais desses subconjuntos são abertos. Justifique sua resposta.

(b) Determine quais desses subconjuntos são limitados. Justifique sua resposta.

Questão 9 *(1 ponto)* Duas normas $||\ ||$ e $|||\ |||$ num espaço vetorial V são equivalentes se existem reais $\alpha > 0, \beta > 0$, tais que $\alpha||v|| \leq |||v||| \leq \beta||v||, \forall v \in V$.

Seja $V = \mathbf{R}^k$.

(a) Mostre que as normas $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_\infty$ são equivalentes em V.

(b) Mostre que as normas $\|\ \|_2$ e $\|\ \|_\infty$ são equivalentes em V.

PARTE III - Sequências em $\mathbf{R}^k$

Questão 10 *(1 ponto)* Seja $\left(x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)\right)_{n \in \mathbf{N}}$ uma sequência em $\mathbf{R}^k$ e seja $\overline{x} = (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^k) \in \mathbf{R}^k$. Mostre que

$$x_n \to \overline{x} \iff x_n^i \to \overline{x}^i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Questão 11 *(1 ponto)* Decida se cada uma das sequências abaixo converge em $\mathbf{R}^3$, e em caso afirmativo, calcule seu limite. Justifique suas afirmações.

(a) $x_n = (\frac{1}{n} + e^{-n}, \frac{\sin n}{n}, a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n),\ n \in \mathbf{N}$, onde $a \in (-1, 1)$.

(b) $x_n = (ne^{-n}, \sin\frac{1}{n}, (-1)^n),\ n \in \mathbf{N}$.

(c) $x_n = (\frac{1}{n} + e^{-n}, \frac{\sin n}{n}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}),\ n \in \mathbf{N}$.

Questão 12 *(1 ponto)* Mostre que em $\mathbf{R}^k$, toda sequência de Cauchy é convergente, isto é, ele é um espaço métrico completo.

PARTE IV - Sequências em Espaços Métricos

Questão 13 *(1 ponto)* Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergente num espaço métrico (M, d) é limitada.

Questão 14 *(1 ponto)* Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ é limitada num espaço métrico (M, d) e $p \in M$, então existe uma bola B centrada em p tal que $x_n \in B, \forall n \in \mathbf{N}$.

Questão 15 *(1 ponto)* Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergente num espaço métrico (M, d) é uma sequência de Cauchy.

Questão 16 *(1 ponto)* Mostre que o espaço métrico definido na questão 8, toda sequência de Cauchy é convergente, isto é, ele é um espaço métrico completo.

Questão 17 *(1 ponto)* Seja $M = C([0,1])$ com a norma $\| \|_i$ e considere em M a sequência $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definida por $f_n(t) = t^n, t \in [0,1]$. Seja $\overline{f} \in M$ a função nula.

Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique sua resposta.

(a) *Com a métrica dada por* $\| \|_1$, *a sequência* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge para* $\overline{f}$.

(b) *Com a métrica dada por* $\| \|_2$, *a sequência* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge para* $\overline{f}$.

(c) *Com a métrica dada por* $\| \|_\infty$, *a sequência* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge para* $\overline{f}$.