MAP0217 - Cálculo Diferencial
MAT0311 - Cálculo Diferencial e Integral V
3a. Prova - 13/10/2018

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2018

Questão 1 *(2,0)* Sejam $(M, d), (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ espaços métricos e seja $f : A \subset M \to \widetilde{M}$.
Sejam $\widetilde{A} \subset A$ e $\widehat{A} = A \setminus \widetilde{A}$.
Seja $a \in A^o$ um ponto de acumulação de A.
Mostre que:

(a) Se a não é ponto de acumulação de $\widehat{A}$ então existe $lim_{x\to a} f$ se e só se existe $lim_{x\to a} f|_{\widetilde{A}}$. Nesse caso, $lim_{x\to a} f = lim_{x\to a} f|_{\widetilde{A}}$.

(b) Se a não é ponto de acumulação de $\widetilde{A}$ então existe $lim_{x\to a} f$ se e só se existe $lim_{x\to a} f|_{\widehat{A}}$. Nesse caso, $lim_{x\to a} f = lim_{x\to a} f|_{\widehat{A}}$.

(c) Se a é ponto de acumulação de $\widetilde{A}$ e é ponto de acumulação de $\widehat{A}$ então existe $lim_{x\to a} f$ se e só se existem $\widetilde{\ell} = lim_{x\to a} f|_{\widetilde{A}}$ e $\widehat{\ell} = lim_{x\to a} f|_{\widehat{A}}$ e $\widetilde{\ell} = \widehat{\ell}$. Nesse caso, $lim_{x\to a} f = lim_{x\to a} f|_{\widetilde{A}} = lim_{x\to a} f|_{\widehat{A}}$.

Questão 2 *(2,0)* Considere o espaço métrico (M, d_*), onde $M = \mathbf{R}^2$ e d_* é definida por

$$d_*(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Mostre que:

(a) A função $f : M \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ é contínua? Justifique sua resposta.

(b) A função $\gamma : \mathbf{R} \to M$ definida por $\gamma(t) = (t, t^2)$ é contínua? Justifique sua resposta.

Questão 3 *(2,0)* Determine para quais valores de $k \in \mathbf{N}$ a função $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^k \sin y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ é contínua na origem.

Questão 4 *(2,0)* Em cada ítem, calcule a derivada parcial de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^k$ no ponto $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbf{R}^2$, com respeito ao vetor $v = (a, b) \in \mathbf{R}^2$.

(a) $k = 1, (\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0), f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(b) $k = 2, (\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0), f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y), & \text{se } x \neq 0, \\ (0, y), & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(c) $k = 3, v = (2, 3), f(x, y) = (xy^3, e^{3x^2y}, x^2 + y^2)$

Questão 5 *(2,0)* Em cada ítem, decida se $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ é ou não diferenciável na origem, e em caso afirmativo, apresente sua diferencial na origem. Em caso afirmativo, determine também se f é ou não de classe C^1. Justifique sua resposta.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} xy \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Questão 6 *(2,0)* Sejam $f, g : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ diferenciáveis em $\overline{x}$ e sejam $H : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, e $K : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ definidas respectivamente por $H(x) = \langle\, f(x) \mid g(x)\, \rangle$ e $K(x,y) = \langle\, f(x) \mid g(y)\, \rangle$.

(a) Mostre que H é diferenciável em $\overline{x}$ e que $DH(\overline{x}) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ é dada por $DH(\overline{x})(u) = \langle\, Df(\overline{x})(u) \mid g(\overline{x})\, \rangle + \langle\, f(\overline{x}) \mid Dg(\overline{x})(u)\, \rangle, \forall u \in \mathbf{R}^p$.

(b) Mostre que K é diferenciável em $(\overline{x}, \overline{x}) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ e que $DH(\overline{x}, \overline{x}) : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ é dada por $DH(\overline{x}, \overline{x})(u,v) = \langle\, Df(\overline{x})(u) \mid g(\overline{x})\, \rangle + \langle\, f(\overline{x}) \mid Dg(\overline{x})(v)\, \rangle, \forall (u,v) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$.

(c) Calcule a matriz jacobiana $JH(\overline{x})$.

(d) Calcule a matriz jacobiana $JK(\overline{x}, \overline{x})$.

Questão 7 *(2,0)* Seja $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = f((x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn})) = \det X,$$

onde $X \in M_{n\times n}(R)$ é a matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Mostre que f é diferenciável em $\overline{x} = (\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, \ldots, \overline{x}_{1n}), (\overline{x}_{21}, \overline{x}_{22}, \ldots, \overline{x}_{2n}), \ldots, (\overline{x}_{n1}, \overline{x}_{n2}, \ldots, \overline{x}_{nn}))$ e que $Df(\overline{x}) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}$ é definida, para cada $v = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}), (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}), \ldots, (v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn})) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n^2}$ por

$$\begin{aligned} Df(\overline{x})(v) &= f((v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}), (\overline{x}_{21}, \overline{x}_{22}, \ldots, \overline{x}_{2n}), \ldots, (\overline{x}_{n1}, \overline{x}_{n2}, \ldots, \overline{x}_{nn})) \\ &+ f((\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, \ldots, \overline{x}_{1n}), (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}), \ldots, (\overline{x}_{n1}, \overline{x}_{n2}, \ldots, \overline{x}_{nn})) \\ &+ \cdots \\ &+ f((\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, \ldots, \overline{x}_{1n}), (\overline{x}_{21}, \overline{x}_{22}, \ldots, \overline{x}_{2n}), \ldots, (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}), \ldots, (\overline{x}_{n1}, \overline{x}_{n2}, \ldots, \overline{x}_{nn})) \\ &+ \cdots \\ &+ f((\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, \ldots, \overline{x}_{1n}), (\overline{x}_{21}, \overline{x}_{22}, \ldots, \overline{x}_{2n}), \ldots, (v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn})), \end{aligned}$$

isto é, se denotarmos por $\overline{X}_i$ a matriz obtida de $\overline{X}$ trocando-se sua linha i por $[v_{i1} v_{i2} \ldots v_{in}]$,

$$Df(\overline{x})(v) = \det \overline{X}_1 + \det \overline{X}_2 + \cdots + \det \overline{X}_i + \cdots + \det \overline{X}_n.$$

Questão 8

(a) Seja $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear, definida por por $T(x) = Ax$, onde $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Considere em $\mathbf{R}^n$ a norma euclidiana usual e a distância usual (distância associada).

Mostre que $|||T||| := sup_{\|x\|\leq 1}\|T(x)\| \leq |A|$, onde $|A| = \sqrt{\sum a_{ij^2}}$.

Nota: *$|\ |$ é a norma usual no espaço vetorial $M_{n\times n}(\mathbf{R})$, enquanto que $|||\ |||$ é a norma no espaço das transformações lineares de $\mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^n$ quando fixada em $\mathbf{R}^n$ a norma usual.*

(b) Mostre que $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por $\phi(x, y) = \frac{1}{6}(\sin(x + 3y)\cos(x - y), \frac{\cos(2y)}{x^2+1})$, é uma contração.

Questão 9 (2 pontos)
Considere

$$F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2, \quad g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

diferenciáveis, tais que $g(x_0, y_0) = (2, 3), h(x_0) = 1$ e $h(y_0) = 4$.

Suponha que $\quad F(h(x), g(x, y), h(y)) = (0, 0),\ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.
São dadas as seguintes matrizes jacobianas:

$$JF(1, 2, 3, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad Jh(x_0) = \begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix}, \qquad Jh(y_0) = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

Calcule (faça todas as contas!) a matriz jacobiana de g no ponto (x_0, y_0).