MAP0217 - Cálculo Diferencial
MAT0311 - Cálculo Diferencial e Integral V
4a. Prova - Peso 1

Entrega: Até 29/08/2018 2º Semestre de 2018

Lembrem-se que apesar desta prova ser dada para fazer em casa, pedi explicitamente que desta vez as questões não fossem discutidas com os colegas.
Serão consideradas para a nota uma questão de cada GRUPO.

GRUPO A

Questão 1 *(1 ponto)*
Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^n$ diferenciável em $(\overline{x}, \overline{y})$ e $A = [A_1, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}, f(x, y)] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$, para cada $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Seja $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por
$$H(x, y) = \det[A_1, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}, f(x, y)].$$
Mostre que H é diferenciável em $(\overline{x}, \overline{y})$ e que
$$DH(\overline{x}, \overline{y})(u, v) = \det[A_1, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}, Df(\overline{x}, \overline{y})(u, v)], \forall (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

Questão 2 *(2 pontos)*
Seja $n \geq 2$ e sejam $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^n$ diferenciáveis em $(\overline{x}, \overline{y})$. Para cada $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ considere $A = [A_1, \ldots, A_{n-2}, g(x, y), f(x, y)] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$.

Seja $K : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por
$$K(x, y) = \det[A_1, \ldots, A_{n-2}, g(x, y), f(x, y)].$$
Mostre que K é diferenciável em $(\overline{x}, \overline{y})$ e que
$$\begin{aligned} DH(\overline{x}, \overline{y})(u, v) &= \det[A_1, \ldots, A_{n-2}, g(\overline{x}, \overline{y}), Df(\overline{x}, \overline{y})(u, v)] + \\ &\quad + \det[A_1, \ldots, A_{n-2}, Dg(\overline{x}, \overline{y})(u, v), f(\overline{x}, \overline{y})], \forall (u, v) \in \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

GRUPO B

Questão 3 (1 pontos) Dê um exemplo de função da forma
$H(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \sin(x^2 - y^2)$ com mínimo local estrito na origem.

Questão 4 *(2 pontos)*
Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por
$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} - 2b \sin xy - \cos xy. \tag{1}$$

(a) Ache o polinômio de Taylor de ordem 2 de f ao redor de $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$.

(b) Mostre que $(0, 0)$ é um ponto crítico de f e para cada $b \in \{-3, -1/2, 1/2, 3\}$, decida se $(0, 0)$ é ponto de mínimo local, ou ponto de máximo local, ou ponto de sela de f.

GRUPO C

Questão 5 *(1 ponto)* Sejam $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, e $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^2$ tais que existem as matrizes jacobianas de $Jf(\overline{x})$ e $Jg(\overline{y})$, e seja $H : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ é definida por $H(x, y) = f(x) + g(y)$. Assinale a afirmação verdadeira, e Justifique.

(a) $JH(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{pmatrix} Jf(\overline{x}) \\ Jg(\overline{y}) \end{pmatrix}$.

(b) $JH(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{pmatrix} Jf(\overline{x}) & O \\ O & Jg(\overline{y}) \end{pmatrix}$.

(c) $JH(\overline{x}, \overline{y}) = Jf(\overline{x}) + Jg(\overline{y})$.

(d) $JH(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{pmatrix} Jf(\overline{x}) & Jg(\overline{y}) \end{pmatrix}$.

(e) Pode não existir $JH(\overline{x}, \overline{y})$.

Questão 6 *(1 ponto)* Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 tal que $Jf(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = [a\ b\ c]$ com $c \neq 0$.

Suponha que $\phi : U = U^\circ \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ é diferenciável em $(\overline{x}, \overline{y})$ e que tal que f se anula no gráfico de ϕ, isto é, vale que

$$f(x, y, \phi(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in U.$$

Calcule a matriz jacobiana de ϕ no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$.

GRUPO D

Questão 7 *(2 pontos) (Parametrização do parabolóide)*

Sejam $a \neq 0, b \neq 0$ e S a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = ax^2 + by^2\}$.

Seja $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por $\varphi(x, y) = (x, y, ax^2 + by^2)$.

Claramente, S é o gráfico de φ.

(a) Note que φ é diferenciável em $(\overline{x}, \overline{y})$ e calcule dim $\mathrm{Im}(D\varphi(\overline{x}, \overline{y}))$.

(b) Mostre, usando o Teorema da Função Injetora, que existe uma vizinhança aberta $U_{(\overline{x}, \overline{y})}$ de $(\overline{x}, \overline{y})$ em que a induzida $\varphi|_{U_{(\overline{x}, \overline{y})}} : U \to \varphi(U_{(\overline{x}, \overline{y})})$ tem inversa contínua.

(c) Mostre que a induzida $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \varphi(\mathbf{R}^2)$ é inversível e tem inversa contínua.

Questão 8 *(2 pontos)* Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (e^x \cos y \sin z, e^x \sin y \sin z)$. Sejam $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (0, \pi/4, \pi/6)$, e $(\overline{u}, \overline{v}) = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

(a) Note que f é diferenciável em $\mathbf{R}^3$ e calcule dim $\mathrm{Im}(Df(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}))$

(b) Decida se $Df(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ é injetora, e se é sobrejetora.

(c) Mostre, usando o Teorema da Função Sobrejetora, que dada uma sequência (α_n, β_n) convergente para $(\overline{u}, \overline{v})$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que se $n \geq N$ então o sistema $\begin{cases} e^x \cos y \sin z = \alpha_n \\ e^x \sin y \sin z = \beta_n \end{cases}$ tem solução (x_n, y_n, z_n), e que essas soluções podem ser escolhidas de forma que $(x_n, y_n, z_n) \to (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ quando $n \to \infty$.

GRUPO E

Questão 9 *(2 pontos)* Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (\sin(x)+y^2+z^3, e^z \cos(y), e^z \sin(y))$.

(a) Mostre que existe uma vizinhança aberta U de $(0, 0, 0)$ em que a induzida $g = f|_U : U \to f(U)$ é inversível e tem inversa de classe C^1.

(b) Calcule $J(g^{-1})(f(0, 0, 0))$ e $D(g^{-1})(f(0, 0, 0))$.

Questão 10 (1 ponto) Decida se a afirmação abaixo é *Verdadeira* ou *Falsa*, e Justifique!

A função $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definida por* $g(x, y, z) = (x, y, e^{x+y+z})$ *satisfaz as hipóteses do Teorema da Função Inversa numa vizinhança de cada ponto* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbf{R}^3$.

GRUPO F

Questão 11 *(2 pontos)* Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (e^x \cos(y)+z, e^x \sin(y)+z^2)$.

(a) Mostre que existem um intervalo (a, b) contendo $\overline{x} = 0$, um aberto $V \subset \mathbf{R}^2$ contendo $(\overline{y}, \overline{z}) = (0, 0)$ e uma função $\phi : (a, b) \to \mathbf{R}^2$ tais que o conjunto das soluções do sistema não linear $f(x, y, z) = (1, 0)$ que estão em $(a, b) \times V$ são exatamente os pontos do gráfico de ϕ.

(b) Calcule $J\phi(0)$ e $D\phi(0)$.

Questão 12 (2 pontos) Considere o problema cuja incógnita é a função ψ:

$$\begin{cases} x \cos \psi(x, y) + \psi(x, y) \cos y = 0, \quad \forall (x, y) \in B_r(0, 0), \\ \psi \in C^1(B_r((0, 0))), \\ \psi(0, 0) = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que existe $r > 0$ tal que o problema acima tem solução. (b) Calcule $D\psi(0, 0)$.