**MAT 0206 - Análise Real / MAP 0216 - Introdução à Análise Real**

1º semestre de 2006 - 2ª PROVA - 22/05/2006

**Questão a1)** Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $p \in A$.

(1.0) (a) Prove que, se $f(p) \neq 0$, então existem $\delta > 0$, $M_1 > 0$ e $M_2 > 0$ tais que $0 < M_1 < |f(x)| < M_2$, para todo $x \in A \cap ]p - \delta, p + \delta[$.

(1.0) (b) Prove que, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma seqüência de elementos de $A$ com $x_n \to p$, então $f(x_n) \to f(p)$.

**Questão a2)** (0.5) (a) Existe $f : [1, 3[ \to \mathbb{R}$ contínua em $[1, 3[$ tal que $f([1, 3[) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ? Justifique.

(1.0) (b) A função $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ é uniformemente contínua em $]0, 1]$ ? Justifique.

(1.5) (c) <u>Usando a definição de função uniformemente contínua</u> em $A \subset \mathbb{R}$, prove que, se $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em $]0, 2]$ e é uniformemente contínua em $[2, +\infty[$, então $f$ é uniformemente contínua em $]0, +\infty[$.

**Questão a3)** Determine se cada série converge ou diverge. Justifique sua resposta.

(0.5) a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (0.5) (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$

(1.0) (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ (1.0) (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \cos\left(\frac{\pi n + 1}{4n}\right)$

**Questão a4)** (Valor 2.0) Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua em $[0, 1]$ tal que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = \text{sen}\left(\frac{\pi c}{2}\right)$.