

REGRAS DO JOGO:

Na nota entrarão duas questões de cada parte.

BOA PROVA!

PARTE I

Questão 1 (1.5 pontos) Seja $X \neq \emptyset$ e considere $\mathcal{A} = \{A \in P(X) \mid A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}$.

- (a) Mostre que $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X .
- (b) Nas condições anteriores, suponha que $X = \mathbf{N}$. Decida se vale ou não a seguinte afirmação, e justifique:
“ $f : X \rightarrow \mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ é $\mathcal{A}$ -mensurável $\iff f(X)$ é finito ou contém $\{n \in \mathbf{N} \mid n \geq n_0\}$ para algum $n_0 \in \mathbf{N}$.”

Questão 2 (1.5 pontos) Seja $X = \{x_n = 1/n \in \mathbf{R} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Seja $\mathcal{A} = P(X)$ e seja $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $\mu(A) = \sum_{x \in A} x^2$. Decida se μ é uma medida em $(X, \mathcal{A})$, e justifique.

Questão 3 (1.5 pontos) Seja $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de X e considere $x_0 \in X$. Tome a medida de Dirac concentrada em x_0 , $\nu_{x_0} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}$, dada por $\nu_{x_0}(A) = 1$, se $x_0 \in A$ e $\nu_{x_0}(A) = 0$, se $x_0 \notin A$. Seja $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ uma função limitada e $\mathcal{A}$ -mensurável. Calcule $\int_X f d\nu_{x_0}$.

Questão 4 (1.5 pontos) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e considere $f : X \rightarrow [0, +\infty[$ mensurável e limitada tal que $\int_X f d\mu = 0$. Prove que existe $M \in \mathcal{A}$, com $\mu(X \setminus M) = 0$ tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in M$.

PARTE II

Questão 5 (1.5 pontos) Seja $I \subset \mathbf{R}^N$ um intervalo fechado com volume $v < \infty$.

- (a) Mostre que se I é limitado, então dado $\epsilon > 0$, existe um intervalo aberto J contendo I cujo volume é $\leq v + \epsilon$.
- (b) A hipótese “ I é limitado” é essencial?

Questão 6 (1.5 pontos) Mostre que:

- (a) Se $A \subset \mathbf{R}$ é Lebesgue-mensurável então a função característica de A , $\chi_A : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, é Lebesgue-mensurável e se $m(A) < \infty$ então $\int_A \chi_A dm = m(A)$.
- (b) O conjunto de Cantor $K \subset \mathbf{R}$ é Lebesgue-mensurável e $m(K) = 0$.
- (b) A função característica do conjunto de Cantor $\chi_K : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ é Lebesgue-integrável e $\int_{[0,1]} \chi_K dm = 0$.

Questão 7 (2.5 pontos) Sejam $U \subset \mathbf{R}^n$ um aberto não vazio. Seja $f : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tal que, para todo $p \in U$, $f_p : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f_p(x) = f(p, x)$ é uma função Lebesgue-mensurável e limitada.

(Note que $[0, 1]$ com a medida de Lebesgue é um espaço de medida finita.)

Nestas condições defina $F : U \rightarrow \mathbf{R}$ por $F(p) = \int_x f(p, x) dm(x)$.

- (a) Prove que se f é limitada e, para todo $x \in [0, 1]$, a função $p \rightarrow f(p, x)$ é contínua, então F é contínua.
- (b) Suponha agora que, para todo $x \in [0, 1]$, a função $p \rightarrow f(p, x)$ é de classe $C^1(U)$ e que exista $M_1 > 0$ tal que

$$|\frac{\partial f}{\partial p_j}(p, x)| \leq M_1, \quad \forall (p, x) \in U \times [0, 1].$$

Prove que F é de classe $C^1(U)$ e que $\frac{\partial F}{\partial p_j}(p) = \int_x \frac{\partial f}{\partial p_j}(p, x) dm(x)$, para todo $p \in U$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.

- (d) Os resultados dos itens anteriores continuam válidos se $[0, 1]$ for substituído por um subconjunto $X \subset \mathbf{R}$ Lebesgue-mensurável de medida finita? Justifique.

PARTE III

Questão 8 (2 pontos) (Prova detalhada de um caso particular do Lema 3.3)

Seja $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ aberto e seja $E \subset \Omega$ compacto. Suponha que para cada $\epsilon > 0$ existe um intervalo $I \subset \mathbf{R}^n$ aberto (não necessariamente contido em Ω), contendo E , tal que $\text{Vol}(I) < m^*(E) + \epsilon$.

Mostre que para cada $\delta > 0$ existem intervalos abertos $I_1, I_2, \dots, I_m$ tais que

$$\bar{I}_j \subset \Omega, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$E \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m \text{ e}$$

$$\text{Vol}(I_1) + \text{Vol}(I_2) + \dots + \text{Vol}(I_m) < m^*(E) + \delta.$$

Questão 9 (2 pontos) (Coordenadas Polares) Considere $\Phi : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \Phi(\Omega) \subset \mathbf{R}^2$ definida por $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- (a) Mostre que se $\Omega = (0, r_0) \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$, então Φ é um difeomorfismo de classe C^1 .
- (b) Para $X = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 - \{O\}$ denotaremos por θ_X o ângulo formado pelo segmento $\overline{OX}$ com o semi-eixo positivo Ox_1 no sentido anti-horário.

Sejam $r_2 > r_1 > 0$ e considere o anel $A = \{X \in \mathbf{R}^2 \mid r_1 \leq \|X\| \leq r_2\}$.

Sejam $\theta_1 < \theta_2$ tais que $\theta_2 - \theta_1 < 2\pi$ e seja R o subconjunto do anel A definido por $R = \{X = (x_1, x_2) \in A \mid \theta_1 \leq \theta_X \leq \theta_2\}$. Mostre que é possível usar Coordenadas Polares para calcular $\int_R x_1 x_2 dm$, e calcule $\int_R x_1 x_2 dm$ usando-as.

- (c) Como poderíamos usar coordenadas polares para calcular $\int_A f dm$ no caso de f ser uma função contínua em $\mathbf{R}^2$?