MAP0334/MAT0321 - Cálculo Diferencial
2a. Prova - Peso 2
BOA PROVA!

Na nota entrará pelo menos uma questão de cada GRUPO. Serão consideradas para a nota questões cujos valores somem no máximo 10.5 pontos.

GRUPO I - Integral de Lebesgue

Questão 1 *(1.0 ponto)* Seja $f : [0,1] \times \mathbf{R}$ contínua e considere $F(y) = \int_{[0,1]} f(x,y)dm(x)$.
Mostre que F é contínua.
O fato de $[0,1]$ ser compacto é essencial?

Questão 2 *(1.5 pontos)* Seja $f : [0,1] \times \mathbf{R}$ de classe C^1 e considere $F(y) = \int_{[0,1]} f(x,y)dm(x)$.
Mostre que F é de classe C^1 e que $F'(y) = \int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dm(x)$.
O fato de $[0,1]$ ser compacto é essencial?

GRUPO II - Mudança de Variáveis

Questão 3 *(2.0 pontos) (Coordenadas polares)* Seja $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Sejam $\Omega = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \subset \mathbf{R}^2$ e $\Lambda = \Lambda^\circ \subset \mathbf{R}^2$ tal que $\Omega \subsetneq \Lambda$.
Vimos em "Cálculo Diferencial/Cálculo V" que $\phi|_\Omega$ é um difeomorfismo (no sentido dado em "Cálculo Integral").
Seja D o disco fechado de centro na origem e raio 1, e para $0 < \epsilon < 1$ sejam

$$E = [0,1] \times [-\pi,\pi],\ E_\epsilon = [\epsilon,1] \times [-\pi+\epsilon, \pi-\epsilon] \subset\subset \Omega, \text{ e } D_\epsilon = \phi(E_\epsilon).$$

Seja $f : D \to \mathbf{R}$ contínua.

(a) Mostre que $\phi|_\Lambda$ não é um difeomorfismo.

(b) Mostre que D não está contido na imagem de $\phi|_\Omega$, mas D_ϵ está contido compactamente na imagem de $\phi|_\Omega$.

(c) Mostre que
$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{D_\epsilon} f(x,y)dm(x,y) = \int_D f(x,y)dm(x,y)$.

(d) Mostre que
$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{E_\epsilon} f(\phi(r,\theta))rdm(r,\theta) = \int_E f(\phi(r,\theta))rdm(r,\theta)$.

(e) Mostre que
$\int_D f(x,y)dm(x,y) = \int_E f(\phi(r,\theta))rdm(r,\theta)$.

GRUPO III - Campos vetoriais e formas diferenciais

Questão 4 *(1.5 pontos)* Considere os campos de vetores

$$T = g_1\frac{\partial}{\partial x} + g_2\frac{\partial}{\partial y} + g_3\frac{\partial}{\partial z} : C^\infty(\mathbf{R}^3) \to C^\infty(\mathbf{R}^3),$$
$$R = h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y} + h_3\frac{\partial}{\partial z} : C^\infty(\mathbf{R}^3) \to C^\infty(\mathbf{R}^3),$$

onde

$g_1(x,y,z) = e^{y+2y+3z}$, $\quad g_2(x,y,z) = xyz$, $\quad g_3(x,y,z) = 5$, $\quad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$,
$h_1(x,y,z) = 2xy$, $\quad h_2(x,y,z) = yz$, $\quad h_3(x,y,z) = xz$, $\quad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

Considere as $1-$formas em $\mathbf{R}^3$ definidas por

$$v = 2dx + 5dy + 4dz, \qquad w = x^3dx + xydy + xyzdz,$$

e a $2-$forma em $\mathbf{R}^3$ dada por $v \wedge w$.

Sejam $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ definida por $f(x,y,z) = \sin(xy^2z^3)$ e $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por $\psi(s,t) = (st^2, s, t)$.

Calcule:

(a) $T(f)$ e $R(f)$.

(b) $w(T)$.

(c) $(v \wedge w)(R, T)$.

(d) w_ψ

(e) dw

(f) $d(v \wedge w)$.

Questão 5 *(1.5 pontos)* Resolva o exercício 4 do capítulo 4 da Apostila do prof. Paulo Cordaro.

Questão 6 *(1.5 pontos)* Resolva o exercício 5 do capítulo 4 da Apostila do prof. Paulo Cordaro.

GRUPO IV - Integração de formas diferenciais em cadeias

Questão 7 *(1.5 pontos)* Resolva o exercício 1 do capítulo 5 da Apostila do prof. Paulo Cordaro.

Questão 8 *(1.5 pontos)* Resolva o exercício 2 do capítulo 5 da Apostila do prof. Paulo Cordaro.

GRUPO IV - Questões relacionando "Cálculo III" e "Cálculo Integral"

Questão 9 *(2.0 pontos)* Considere a $B \subset \mathbf{R}^3$ a bola fechada de centro na origem e raio 1 e seja Φ a parametrização $3-$superfície

$$\Phi(t_1,t_2,t_3) = (t_3 \sin t_1 \cos t_2, t_3 \sin t_1 \sin t_2, t_3 \cos t_1), (t_1,t_2,t_3) \in [0,\pi] \times [0,2\pi] \times [0,1],$$

cuja imagem é essa bola B (no "Cálculo III", Φ "parametriza" B).

Seja $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ a densidade de massa volumétrica de B.

(a) Calcule a massa de $B = \int_B \rho(x,y,z)dV$, usando "as técnicas" de "Cálculo III", utilizando a parametrização Φ.

(b) Calcule integral da $3-$forma $\rho(x,y,z)dx \wedge dy \wedge dz$ no compacto $B \subset \mathbf{R}^3$,

$\int_B \rho(x,y,z)dx \wedge dy \wedge dz$,

usando "as técnicas" de "Cálculo Integral".

(c) Calcule integral da $3-$forma $\rho(x,y,z)dx \wedge dy \wedge dz$ na 3-superfície Φ,

$\int_\Phi \rho(x,y,z)dx \wedge dy \wedge dz$,

usando "as técnicas" de "Cálculo Integral".

Questão 10 *(2.0 pontos)* Considere a a semi-esfera $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ dada por

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Seja

$$\varphi(t_1, t_2) = (\sin t_1 \cos t_2, \sin t_1 \sin t_2, \cos t_1), (t_1, t_2) \in A = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi].$$

Note que a imagem de φ é $\mathcal{S}$ (em "Cálculo III", φ é usada para "parametrizar" $\mathcal{S}$ usando "coordenadas esféricas").

Considere ainda a densidade de massa superficial $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(a) Lembre-se de "Cálculo III" e calcule a massa de $\mathcal{S}$, ou seja, $\int_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) dS$, usando a parametrização φ.

(b) Utilizando os conceitos vistos em "Cálculo Integral", considere $\Omega = \mathbf{R}^2$ e calcule a integral da $2-$forma

$$\rho_\varphi \| \tfrac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \tfrac{\partial \varphi}{\partial t_2} \| dt_1 \wedge dt_2 \in \mathrm{F}_2(\Omega)$$

no compacto $A \subset \Omega$ (onde ρ_φ é o pull-back de ρ por φ), ou seja, calcule

$$\int_A \rho_\varphi \| \tfrac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \tfrac{\partial \varphi}{\partial t_2} \| dt_1 \wedge dt_2.$$

Questão 11 *(2.0 pontos)* Considere a semi-esfera $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ e a $\varphi : A = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ como na questão 10.

No sentido visto em "Cálculo III", considere $\mathcal{S}$ "orientada para fora".

Ainda no sentido visto em "Cálculo III", considere o "campo de vetores"

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) = (y, -x, z).$$

Seja w a $2-$forma em $\Omega = \mathbf{R}^3$ definida por $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

Note que φ é uma $2-$superfície em $\Omega = \mathbf{R}^3$ no sentido dado em "Cálculo Integral".

Considere ainda a $2-$cadeia singular em $\Omega = \mathbf{R}^3$ definida por

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \text{ onde } \psi_1 = \varphi \circ \sigma_1, \psi_2 = \varphi \circ \sigma_2,$$

sendo que σ_1 e σ_2 são os $2-$simplexos afins

$$\sigma_1 = [(0, 0), (\pi/2, 0), (\pi/2, \pi)] \text{ e } \sigma_2 = [(0, 0), (\pi/2, \pi), (0, \pi)].$$

(Nota: σ_1 e σ_2 servem para descrever o domnio de φ como uma cadeia afim!)

(a) No sentido de "Cálculo III", calcule o fluxo de F através de $\mathcal{S}$, ou seja, calcule

$\int_{\mathcal{S}} F.ndS.$

(b) No sentido de "Cálculo Integral", calcule a integral da $2-$forma w sobre a $2-$superfície φ, ou seja, calcule

$$\int_\varphi Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

(c) No sentido de "Cálculo Integral", calcule a integral da $2-$forma w sobre a $2-$cadeia singular $\psi = \psi_1 + \psi_2$, ou seja, calcule

$$\int_{\psi_1 + \psi_2} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$