Teoria dos Conjuntos - P1 -entrega no e-disciplinas 20/06/2020

Espera-se que a resolução da prova tenha um toque pessoal na escrita e que deixe claro que o aluno tenha entendido as ideias expostas.

Questão 1. *(2,5) Resuma brevemente os principais tópicos do que foi visto no curso até agora em duas categorias:*

a) conceitos e demonstrações que já eram conhecidos, mas ficaram mais claros ao longo deste curso e o que mudou na sua percepção.

b) conceitos e demonstrações que foram novidade e que foram interessantes e por que.

Questão 2. *(2,5) Disserte sobre o que mais chamou sua atenção sobre o que foi estudado até agora, e se ela ajuda a entender melhor algo que foi aprendido anteriormente em outras disciplinas.*

Questão 3. *(2,0) O ponto principal desta questão é destacar o uso do Axioma da Escolha e da aritmética cardinal.*

Seja X um espaço topológico Hausdorff em que todos os pontos tem uma base local enumerável (para cada x existe $\mathcal{V}_x$ enumerável tal que $V \in \mathcal{V}_x$ é uma vizinhança aberta de X e para cada W vizinhança de x, existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subseteq W$). Mostre que se A é um subconjunto de X com $|A| \leq 2^{\aleph_0}$ então $|\overline{A}| \leq 2^{\aleph_0}$.

Sugestão: *encontre uma função injetora de $\overline{A}$ no conjunto de sequências de A, verificando que, para todo $x \in \overline{A}$ existe uma sequência convergente em A (com limite único por X ser Hausdorff) que converge para x).*

Questão 4. *(3,0) O ponto principal da questão é utilizar a recursão e a indução de forma detalhada, além do Axioma da Escolha.*

Seja X um espaço Hausdorff tal que todo ponto tem base local enumerável (ver exercício anterior). Vamos fixar as bases locais como $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$. Construa uma família de conjuntos $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ satisfazendo:

a) A_0 um conjunto unitário fixado.

b) se $\beta < \alpha$ então $A_\beta \subseteq A_\alpha$;

c) cada A_α é um conjunto fechado de cardinalidade $\leq 2^{\aleph_0}$.

d) se $\alpha = \gamma + 1$, $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{x \in A_\gamma} \mathcal{V}_x$ com $\mathcal{C}$ enumerável e $A_\gamma \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ e $X \setminus \bigcup \mathcal{C} \neq \emptyset$ então $A_\alpha \setminus \bigcup \mathcal{C} \neq \emptyset$.

e) se $\alpha < \omega_1$ é ordinal limite então $A_\alpha = \overline{\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta}$.