P1 de Teoria dos Conjuntos - 29/04/2015

Faça os dois primeiros exercícios, além de mais dois especificados abaixo.

Questão 1. *Enuncie e esboce a demonstração teorema da recursão e mostre como aplicação que a família dos conjuntos Borelianos da reta tem cardinalidade* 2^ω *e que a existência de funções escolha para toda família não vazia de conjuntos não vazios implica que todo conjunto é bem ordenável.*

Questão 2. *Enuncie os resultados relativos a comparação de ordem em a)-c). Indique o que é utilizado nas demonstrações de cada uma e as diferenças entre as três demonstrações,*

a) Dois conjuntos bem-ordenados.

b) Dois ordinais.

c) Um conjunto bem ordenado e os ordinais.

Faça um dos dois abaixo:

Questão 3. *Enuncie e prove o resultado necessário para mostrar, sem o Axioma da Escolha, que se* α *é um cardinal então existe um cardinal* β *tal que* $\beta > \alpha$*. Enfatize onde o axioma da compreensão e o axioma da substituição são necessários.*

(+) **Questão 4.** *Defina tipo de ordem (order type). Mostre que dada uma família não enumerável de conjunto finitos, existe* r *um conjunto finito e uma subfamília não enumerável tal que cada dois elementos distintos da subfamília tem* r *como intersecção. É para adaptar a demonstração do caso geral do* Δ*-system lemma que utiliza order type e comentar o que muda na demonstração geral.*

Faça um dos dois abaixo:

Questão 5. *Seja L um espaço ordenado linear c.c.c sem pontos isolados tal que todo subconjunto não vazio tem supremo e ínfimo. Mostre que existe um subconjunto denso de cardinalidade $\leq \aleph_1$ que é denso em L. Utilize todas as condições listadas (é para fazer um resultado pior do que o da lista mesmo, para forçar reescrever a prova para este caso).*

Questão 6. *Seja X de cardinalidade infinita e duas boas ordens sobre ele. Mostre que existe um subconjunto Y de X de mesma cardinalidade tal que as duas boas ordens coincidem em Y. Prove o caso em que o cardinal de X é regular e dê uma ideia da prova para cardinalidade de X singular.*