Prova 1 - MAT0331 - 2o. semestre de 2020

1. (3,0) Decida se é V ou F, mostrando ou dando um contra-exemplo:
(a) $A \subset B$ e $C \subset D \to A \times C \subset B \times D$.
(b) Se $a \in A$, então $\{a\} \subset \bigcup \mathcal{P}(A)$.
(c) Se $A \in B$ e $B \in C$, então $A \in C$.
(d) $\mathcal{P}(\bigcap \mathcal{C}) = \bigcap\{\mathcal{P}(X) : X \in \mathcal{C}\}$, onde $\mathcal{C}$ é uma família não vazia de conjuntos.

2. (2,0) Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma função, $A \subset Y$ e $B \subset Y$. Mostre que

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

3. (5,0) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função sobrejetora qualquer.
(a) Mostre que $\mathcal{P} = \{f^{-1}[\{n\}] : n \in \mathbb{N}\}$ é uma partição de $\mathbb{N}$.
(b) Mostre que a relação de equivalência correspondente à partição $\mathcal{P}$ é a relação $E_{\mathcal{P}}$ dada por $nE_{\mathcal{P}}m$ se e somente se $f(n) = f(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. A seguir, denotaremos $E_{\mathcal{P}}$ só por E para facilitar.
(c) Defina $h : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{N}$ por $h([n]_E) = f(n)$. Mostre que h está bem definida, ou seja, que h de fato é uma função.
(d) Mostre que h é injetora.
(e) Ache $h[A]$ e $h^{-1}[B]$ onde $A = \{[1]_E, [3]_E\}$ e $B = \{0, 5\}$.

4. (2,0) Seja A o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja R a relação em A definida por fRg se e somente se $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (onde $\leq$ é a ordem usual em $\mathbb{N}$).
(a) Mostre que R define uma ordem parcial em A.
(b) Qual é o menor elemento de A com relação a esta ordem? Justifique.
(c) Justifique a afirmação: esta ordem não é total.