

Prova 2 - MAT0331 - 2o. semestre de 2020

1. Mostre as afirmações abaixo, usando apenas as definições e resultados como dados nos textos disponibilizados (em particular, apenas definições dadas de $<$ e de $n+1 = S(n)$, PIF e que $<$ é uma ordem estrita):

- (a) (1,0) Se $n \in \mathbb{N}$ qualquer, não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < k < n+1$.
- (b) (1,0) Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ temos que se $m < n$, então $m+1 \leq n$ (usando o item (a)).
Conclua que $m < n$ implica $m+1 < n+1$.
- (c) (2,0) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, então existe um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = (k+1) + 1$.

2. Para A, B e C conjuntos, mostre as afirmações abaixo, justificando todas as afirmações:

- (a) (1,0) Se $|A| < |B|$ e $|B| = |C|$, então $|A| < |C|$.
- (b) (1,0) Se $|A| = |B|$ e $C \neq \emptyset$, então $|A| \leq |B \times C|$.
- (c) (1,5) Mostre que se $|A| = |\mathbb{N}|$ e E é uma relação de equivalência em A , então A/E é enumerável.

3.

- (a) (1,0) Mostre que se um conjunto A é enumerável, então para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vale que $A \times \dots \times A = A^n$ é enumerável. (Obs: Pode usar que $A \times A$ é enumerável).
- (b) (1,5) Mostre que se A é finito, então $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

4. (2,0) Mostre, usando apenas os axiomas de ZF, que são conjuntos:

- (a) $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ e $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, A\}$;
- (b) $(A \cup B) \setminus C$, sabendo que A, B e C são conjuntos.