Prova de MAT0334 - Análise Funcional - MODELO 1

Prova 01 - 09 de junho 2020

Profa. Mary Lillian Lourenço

MODELO 1: prova para o aluno cujo número USP tem final : 1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9.

JUSTIFIQUE DEVIDAMENTE SUAS RESPOSTAS!

1. (1,5 pontos)

(a) Considere $l_2 = \{x = (\xi_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{i \rightarrow \infty} |\xi_i|^2 < \infty\}$ munido da norma usual $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$. Seja $T : l_2 \rightarrow l_2$ dada por

$$T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (\xi_3, \xi_4, \dots, \xi_n, \dots).$$

Mostre que T é linear e contínua e calcule $\|T\|$.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x_1 + 2x_2 + 2x_3$, para cada $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Considere $\mathbb{R}^3$ munido da norma euclidiana.

Mostre que f é linear, continua e determine $\|f\|$.

2. (2,5 pontos) Sejam $(E, \|\cdot\|)$ e $(F, \|\cdot\|)$ espaços normados

(a) Prove que a função $\|\cdot\|_1 : E \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$ define uma norma em $E \times F$.

(b) Se E e F são espaços de Banach Mostre que $(E \times F, \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach.

(c) Considere a norma $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ definida em $E \times F$. Mostre que as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ são equivalentes em $E \times F$.

(d) Se E e F são espaços de Banach, mostre que $(E \times F, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

3. (3 pontos) Seja E um espaço de Banach com uma base de Schauder $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Seja E_1 o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de espaço de seqüências, definido a seguir:

$$E_1 = \{(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \text{ converge em } E\}$$

Considere a função $\mathcal{N} : E_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$\mathcal{N}((\alpha_n)_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| \right\}$$

- (a) Prove que $\mathcal{N}$ é uma norma em E_1 .
- (b) Prove que $(E_1, \mathcal{N})$ é um espaço de Banach.
- (c) Se $T : E_1 \rightarrow E$ é uma aplicação dada por:

$$T((\alpha_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Mostre que T é um isomorfismo topológico, ou seja isomorfismo entre espaços de Banach.

4. (1 ponto) Seja $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Para cada $x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_3$ a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$ converge. Prove que $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_{\frac{3}{2}}$