P3

segunda-feira, 10 de agosto de 2020 12:35

P3-1

3 ª Prova de MAT0334 - Análise Funcional
06 de agosto de 2020
Profa. Mary Lilian Lourenço

JUSTIFIQUE DEVIDAMENTE SUAS RESPOSTAS!

PROVA VALE 9 pontos

1ª Questão: (1,0 ponto) Sejam $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ duas sequências em um espaço de Hilbert com $||x_n|| = 1$ e $||y_n|| = 1 \ \ \forall n \in I\!N$. Prove que se $< x_n, y_n > \to 1$ então $||x_n - y_n|| \to 0$.

$$\|x_n - y_n\|^2 = \langle x_n - y_n, x_n - y_n \rangle$$
$$= \langle x_n, x_n \rangle - \langle x_n, y_n \rangle - \langle y_n, x_n \rangle + \langle y_n, y_n \rangle = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_n \rangle = 2 - \langle x_n, y_n \rangle - \langle y_n, x_n \rangle.$$

Como $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$, segue que $\langle y_n, x_n \rangle = \overline{\langle x_n, y_n \rangle} \to 1$, pois a função $z \in \mathbb{K} \mapsto \overline{z}$ é contínua. Daí,

$$\lim \|x_n - y_n\|^2 = 2 - \lim \langle x_n, y_n \rangle - \lim \langle y_n, x_n \rangle$$
$$= 2 - 1 - 1 = 0.$$

Portanto, $\|x_n - y_n\| \to 0$.

2ª Questão: (2,0 pontos) Sejam E um espaço de Banach e $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$.

a) Se T é um operador compacto, mostre $T \circ S$ é um operador compacto.

b) Dê um exemplo de um operador **não** compacto definido entre espaços de Banach tal que $T \circ T$ é um operador compacto.

c) Sejam F um espaço normado de dimensão infinita e $R : F \to F$ um operador compacto e bijetor. Mostre que o operador inverso de R, $R^{-1} : F \to F$ não é contínuo.

a) Seja $(x_n) \subset E$ limitada. Como S é operador contínuo, $(Sx_n) \subset E$ é limitada. Mas como T é compacto, existe $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tq (TSx_{n_k}) converge em E. Logo, $T \circ S$ é cpt.

b) Considere $T: \ell_1 \to \ell_1$ definido por $T(a_j)_j = (0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \dots)$.

• A sequência $\{e_1, e_3, e_5, \dots\} \subset \ell_1$ é limitada, mas $\{Te_1 = e_2, Te_3 = e_4, \dots\}$ não admite subseq. convergente em ℓ_1. Logo, T não é cpt.

• $T \circ T = 0 \therefore T^2$ é cpt.

c) Se R^{-1} contínuo, pelo item (a), $I_F = R \circ R^{-1}$ seria compacto, o que não ocorre, pois $\dim F = \infty$. Logo, R^{-1} não é contínuo.

$3^{\underline{a}}$ Questão: (2 pontos) **a)** Seja $S : l_2 \to l_2$ definida por $S(\xi_1, \xi_2, ...) = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$.

i) Calcule o adjunto de S isto é, calcule S^*.

ii) S é um operador compacto? Justifique sua resposta.

$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^* y\rangle$ $\forall x, y \in l_2$

b) Seja $T : l_2 \to l_2$, $T((\xi_j)_j) = \left(\frac{\xi_j}{j}\right)_{j\in N}$.

i) Calcule T^* e mostre que $T = T^*$.

ii) Mostre que T é um operador compacto.

a) Sejam $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j) \in l_2$. Daí

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{(S^*y)_j} = \langle x, S^*y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta_{j+1}}.$$

vale para todo $x = (\xi_j)_j \in l_2$. Tome $x = e_j$, $(S^*y)_j = \eta_{j+1}$, $(\forall j)$. Logo, $S^*y = (\eta_2, \eta_3, \eta_4, \dots)$.

(ii) Como $S^* \circ S\,(\xi_j)_j = S^*(0, \xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ $\forall (\xi_j) \in l_2$, segue que $S \circ S^* = I_{l_2}$. Logo, S não pode ser cpt, pois se o fosse, I_{l_2} seria cpt. ($(e_n) \subset l_2$ é limitada, mas $Se_n = e_{n+1}$ não tem subseq. converg.)

b) (i) Sejam $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j) \in l_2$. Daí,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{(T^*y)_j} = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j \overline{\eta_j})/j.$$

Tomando $x = e_j$, $(T^*y)e_j = \eta_j/j$ $(\forall j)$. Logo, $T^*y = (\eta_j/j)$ $\forall y \in l_2$. Consequentemente, $T = T^*$.

$3^{\underline{a}}$ Questão: (2 pontos) **a)** Seja $S : l_2 \to l_2$ definida por $S(\xi_1, \xi_2, ...) = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$.

i) Calcule o adjunto de S isto é, calcule S^*.

ii) S é um operador compacto? Justifique sua resposta.

b) Seja $T : l_2 \to l_2,\ T((\xi_j)_j) = \left(\dfrac{\xi_j}{j}\right)_{j \in N}$.

i) Calcule T^* e mostre que $T = T^*$.

ii) Mostre que T é um operador compacto.

bii) Como l_2 é reflexivo, é suficiente mostrar que T é completa$|_E$ contínuo. Seja $x_n \xrightarrow{w} 0$ em l_2. Como $a = (1/j) \in l_2 = l_2'$, segue que $\sum \xi_j^n / j = a(x_n) \longrightarrow 0$.

Como (x_n) é ltdo, existe $M > 0$ tq $\|x_n\|_2 \leq M$ $\forall n$. Em particular, $|\xi_j^n| \leq M$ $\forall n, j$. Daí,

$\|Tx_n\|_2^2 = \sum |\xi_j^n|^2 / j^2 = \sum \dfrac{\xi_j^n}{j} \cdot \dfrac{\overline{\xi_j^n}}{j} \leq M \sum \xi_j^n / j =$

$= M a(x_n) \longrightarrow 0$.

$\therefore Tx_n \longrightarrow 0$. $\therefore$ T é compacto.

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** (2,0 pontos) Seja H um $\mathbb{K}$-espaço de Hilbert. Seja $T : H \to H$ um operador linear contínuo. Dizemos que T é um operador normal se $T \circ T^* = T^* \circ T$, onde T^* é o adjunto de T.

a) Sejam $(T_n)_{n \in N} \subset \mathcal{L}(H, H)$ uma sequência de operadores normais e $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Se $||T_n - T|| \to 0$ em $\mathcal{L}(H, H)$, prove que T é um operador normal.

b) Se H é um espaço de Hilbert complexo.
Mostre que S é normal $\Leftrightarrow ||S^*(x)|| = ||S(x)||\ \forall x \in H$.

a) Note que

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\| \to 0.$$

Vejamos que $T_n^* \circ T_n \to T^* \circ T$ e que $T_n \circ T_n^* \to T \circ T^*$. Mais geralmente, se $S_n \to S$ e $R_n \to R$ em $\mathcal{L}(H; H)$, então $S_n \circ R_n \to S \circ R$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|S_n - S\| < \frac{\varepsilon}{2\|R\|}\ \forall n \geq n_1 \quad \text{e} \quad \|R_n - R\| < \frac{\varepsilon}{2M}\ \forall n \geq n_2,$$

onde $M = \sup \|S_n\|$. Se $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$\|S_n \circ R_n - S \circ R\| \leq \|S_n \circ R_n - S_n \circ R\| + \|S_n \circ R - S \circ R\| \leq \|S_n\| \cdot \|R_n \circ R\| + \|S_n - S\| \cdot \|R\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2\|R\|}\|R\| = \varepsilon.$$

Daí, $T^* \circ T = \lim T_n^* \circ T_n \underset{\uparrow}{=} \lim T_n \circ T_n^* = T \circ T^*$

T_n normal $\forall n$.

$\therefore T$ normal.

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** (2,0 pontos) Seja H um $I\!K$-espaço de Hilbert. Seja $T : H \to H$ um operador linear contínuo. Dizemos que T é um operador normal se $T \circ T^* = T^* \circ T$, onde T^* é o adjunto de T.

a) Sejam $(T_n)_{n \in N} \subset \mathcal{L}(H,H)$ uma sequência de operadores normais e $T \in \mathcal{L}(H,H)$. Se $||T_n - T|| \to 0$ em $\mathcal{L}(H,H)$, prove que T é um operador normal.

b) Se H é um espaço de Hilbert complexo.
Mostre que S é normal $\Leftrightarrow ||S^*(x)|| = ||S(x)||\ \forall x \in H$.

b) H complexo.

($\Rightarrow$) Suponha que S seja normal, i.e. $S^* \circ S = S \circ S^*$. Dos, dado $x \in H$

$$\|S^*(x)\|^2 = \langle S^*x, S^*x \rangle = \langle S(S^*x), x \rangle$$
$$= \langle S^*(Sx), x \rangle = \overline{\langle x, S^*(Sx) \rangle}$$
$$= \overline{\langle Sx, Sx \rangle} = \langle Sx, Sx \rangle = \|Sx\|^2$$

$\therefore \|S^*x\| = \|Sx\|\ \forall x \in H.$

($\Leftarrow$) $\|S^*x\| = \|Sx\|\ \forall x \in H \Rightarrow$

$$4\langle S \circ S^* x, y \rangle = 4\langle S^*x, S^*y \rangle = \|S^*x + S^*y\|^2 -$$
$$- \|S^*x - S^*y\|^2 + i\|S^*x + iS^*y\|^2 - i\|S^*x - iS^*y\|^2$$
$$= \|Sx + Sy\|^2 - \|Sx - Sy\|^2 + i\|Sx + iSy\|^2$$
$$- i\|Sx - iSy\|^2 = 4\langle Sx, Sy \rangle = 4\overline{\langle Sy, Sx \rangle}$$
$$= 4\overline{\langle y, S^* \circ Sx \rangle} = 4\langle S^* \circ S x, y \rangle\ \forall x, y \in H$$

$\therefore S \circ S^* = S^* \circ S \ \therefore S$ normal.

5ª Questão: (2,0 pontos) Seja H um espaço de Hilbert. Sejam $(e_n)_{n\in N}$ uma sequência ortonormal em H e $(\xi_n)_{n\in N}$ uma sequência de escalares.

a) Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ converge em $H \Leftrightarrow (\xi_n)_{n\in N} \in l_2$.

b) Se $(\xi_n)_{n\in N} \in l_2$, mostre que $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\right)^{1/2}$

a)

Seja (ξ_n) uma seq. em $\mathbb{K}$ e $N > M \in \mathbb{N}$.

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n - \sum_{n=1}^{M} \xi_n e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} \xi_n e_n \right\|^2$$

$$\overset{\text{Pitágoras}}{=} \sum_{n=M+1}^{N} \|\xi_n e_n\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |\xi_n|^2. \quad (*)$$

$(\Leftarrow)$

Como $\sum |\xi_n|^2 < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\sum_{n=M+1}^{N} |\xi_n|^2 < \varepsilon^{1/2}$ $\forall N, M \geq n_0$. Daí, se $N, M \geq n_0$, $\left\| \sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n - \sum_{n=1}^{M} \xi_n e_n \right\| < \varepsilon$. Logo $\left(\sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n\right)_N$ é seq. de Cauchy em H. Então, como H é completo, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ converge em H.

5ª Questão: (2,0 pontos) Seja H um espaço de Hilbert. Sejam $(e_n)_{n\in N}$ uma sequência ortonormal em H e $(\xi_n)_{n\in N}$ uma sequência de escalares.

a) Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ converge em $H \Leftrightarrow (\xi_n)_{n\in N} \in l_2$.

b) Se $(\xi_n)_{n\in N} \in l_2$, mostre que $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\right)^{1/2}$

a)

($\Rightarrow$) Se $\sum \xi_n e_n$ converge em H, a seq. $\left(\sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n\right)_N$ é de Cauchy em H. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\left\| \sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n - \sum_{n=1}^{M} \xi_n e_n \right\| < \varepsilon^{1/2}$ $\forall N, M \geq n_0$.

Por ⊛, temos que $\sum_{n=M+1}^{N} |\xi_n|^2 < \varepsilon$ para todos $N \geq M \geq n_0$. E daí, $(\xi_n) \in l_2$.

b) Se $(\xi_n) \in l_2$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \|\xi_n e_n\|^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \right\|^2$$

$$\therefore \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \right\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \right)^{1/2}. \quad \#$$