Recuperação de MAT0334 - Análise Funcional

10 de setembro de 2020

Profa. Mary Lilian Lourenço

JUSTIFIQUE DEVIDAMENTE SUAS RESPOSTAS!

A PROVA VALE 10 pontos

A prova está constituída de 6 exercícios (somam 12 pontos), você deverá postar exercícios resolvidos, de forma a somar no máximo 10 pontos. Caso contrário anulo um exercício aleatório antes de iniciar a correção.

1ª Questão: (1,0 ponto) Seja E um espaço Banach e E' seu dual. Seja $T : E \longrightarrow E'$ um operador linear tal que

$$T(x)(y) = T(y)(x) \quad \text{para todos } x, y \in E.$$

Mostre que T é contínuo.

2ª Questão: (2,5 pontos) Considere o conjunto

$$S = \{(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \text{tal que } \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^n \xi_j \right| < \infty\}$$

- (a) Mostre que S é um espaço vetorial
- (b) Considere a função $\| \cdot \| : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^n \xi_j \right|.$$

Mostre que tal função é uma norma em S

- (c) Prove que S é isomorfo isometricamente a l_{∞} .

3ª Questão: (2,5 pontos) Sejam E e F espaços normados e de dimensão infinita. Mostre que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach com a norma do sup se, e somente se, F é um espaço de Banach.

4ª Questão: (2,5 pontos)

Sejam E, F espaços de Banach e $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E, F)$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes.

a) $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

b) $(\|T_n(x)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada para cada $x \in E$.

c) $(g(T_n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada para $g \in F'$ e para cada $x \in E$.

5ª Questão: (2 pontos) Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um espaço vetorial E . tais que $(E, \|\cdot\|_1)$ e $(E, \|\cdot\|_2)$ são completos.

- (a) Seja $(x_n)_n$ é uma sequência em E . Suponha que a convergência de $\|(x_n)_n\|_1$ a zero sempre implica que $\|(x_n)_n\|_2$ converge a zero. Prove que as normas, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, são equivalentes.
- (b) Se existe $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$, para todo $x \in E$. Mostre que as duas normas, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, são equivalentes.

6ª Questão: (1,5 pontos) Seja $S : l_2 \rightarrow l_2$ definida por $S(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$.

a) Mostre que S é uma isometria, mas não é sobrejetora.

b) Para cada $\varphi \in l'_2$ prove que existe $h_0 = (\eta_i) \in l_2$ tal que $\varphi \circ S(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$ para todo $h = (\xi_i) \in l_2$.

c) S é um operador compacto? Justifique.