Prova Substutiva de MAT0334 - Análise Funcional
13 de agosto de 2020
Profa. Mary Lilian Lourenço

JUSTIFIQUE DEVIDAMENTE SUAS RESPOSTAS!

PROVA VALE 10 pontos (substitui uma das 3 provas)

A prova está constituida de 6 exercícios (somam 12 pontos), você deverá postar exercícios resolvidos, de forma a somar no máximo 10 pontos. Caso contrário anulo um exercício aleatório antes de iniciar a correção.

1ª Questão: (1 ponto) Seja E um espaço normado e seja $x_0 \in E$, um vetor dado. Prove que o conjunto

$$\{\varphi \in E' \ : \ ||\varphi|| = ||x_0|| \ \text{ e } \ \varphi(x_0) = ||x_0||^2\}$$

é não vazio, convexo e fechado em E'.

2ª Questão: (2 pontos) Seja c_0 o espaço de sequências que convergem a zero.

(i) Considere $< \ , \ >: c_0 \times c_0 \longrightarrow I\!K$ a função definida por

$$< (\xi_n)_n, (\eta_n)_n >= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \ \xi_n \overline{\eta_n}.$$

Peove que $<,>$ é um $I\!K$- produto interno em c_0.

(ii) Considere c_0 com a norma usual. Seja $\varphi : c_0 \longrightarrow I\!K$ definda por

$$\varphi((\xi_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \ \xi_n, \quad \forall x = (\xi_n)_n \in c_0$$

(a) Mostre que φ é linear,contínua e $\|\varphi\| = 1$

(b) Mostre que não existe $x \in c_0$ tal que $\|x\| \leq 1$ e $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$.

3ª Questão: (2 pontos) Sejam E um espaço de Banach real e $T : E \longrightarrow E'$ um operador linear tal que

$$T(x)(x) \geq 0 \quad \forall x \in E.$$

Prove que T é contínuo.

4ª Questão: (2,5 pontos)

(i) Mostre que toda sequência fracamente de Cauchy é limitada.

(ii) Prove que espaços reflexivos são fracamente sequencialmente completos.

Definição:(a) Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço normado E é denominada uma *sequência fracamente de Cauchy* se para cada $\varphi \in E^{'}$, a sequência $(\varphi(x_n))_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$.

(b) Dizemos que um espaço normado é *fracamente sequencialmente completo* se toda sequência fracamente de Cauchy em E é fracamente convergente.

5ª Questão: (2,5 pontos) Sejam E e F espaços normados.

(a) Prove que $\mathcal{L}(E, F)$ contém um subespaço isomorfo isometricamente a $E^{'}$.

(b) Se E e F são espaços de Banach e $\mathcal{L}(E, F)$ é reflexivo, mostre que E é reflexivo.

6ª Questão: (2 pontos) Sejam $(e_n)_{n\in N}$ uma base de Schauder de um espaço de Hilbert H e $(e_n^*)_{n\in N}$ seus funcionais coeficientes tais que $\|e_n\| = \|e_n^*\| = 1$ para todo n. Prove que $(e_n)_{n\in N}$ é um sistema ortonormal completo de H.

Observe que funcionais coeficientes são funcionais construido em $H^{'}$ à partir da sequência $(e_n)_n$,