PRIMEIRA PROVA, (PESO 1) MAT 0334 5/5/15

ANTONIO DE PADUA

Questão 1. (i) Obtenha a série de Fourier no intervalo $]-\pi, \pi[$ da função $f(x) = x$.
(ii) Idem para $g(x) = |x|$.

Questão 2. Sejam E e F espaços normados, e $f : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Mostre que as seguintes sentenças são equivalentes:
(i) f é continua na origem $0 \in E$.
(ii) $\sup_{||x|| \leq 1} ||f(x)|| = M < \infty$.
(iii) Existe $C > 0$ tal que $||f(x)|| \leq C||x||$ para todo $x \in E$.
(iv) f é contínua.

Questão 3. Seja $\{x_i\}_{i \in I}$ uma família de números reais positivos. Suponha que exista um número real $\alpha > 0$ tal que

$$\forall F \in [I]^{<\omega} \text{ valha } \sum_{i \in F} x_i \leq \alpha.$$

Mostre que esta família é somável e que tem por soma

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup(\{\sum_{i \in F} x_i : F \in [I]^{<\omega}\}).$$

Questão 4. Sejam E um espaço de Hilbert, e $\{e_i\}_{i \in I}$ um sistema ortonormal. Mostre que

$$\sum_{i \in I} x_i e_i$$

é a projeção ortogonal de $x \in E$ no sub-espaço vetorial fechado F gerado por $\{e_i\}_{i \in I}$.

Cuidado, as hipóteses são fracas.