3. Segunda Prova (peso 2) MAT 0334 2/6/2015

Antonio de Padua.

Questão 1. Mostre que $\mathcal{C}(K)$ o espaço das funções contínuas de um espaço compacto K em $\mathbb{C}$, com a norma

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$$

é um espaço linear completo, isto é, $\mathcal{C}(K)$ é espaço de Banach quando equipado com a topologia da convergência uniforme.

Questão 2. Mostre que

$$l_1(N) = \{\langle x_n \rangle_{n\in N} : \sum_{n\in N} |x_n| < \infty\}$$

é um espaço vetorial normado e completo para a norma $||\langle x_n\rangle_{n\in N}||_1 = \sum_{n\in N} |x_n|$.

Questão 3. Seja $E/\mathbb{C}$ um espaço vetorial e seja $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i\in I}$ uma base algébrica de E. Portanto, para cada $x \in E$ existe finito $F \subset I$ e $\{\lambda_i \in \mathbb{C} : i \in F\}$, tais que

$$x = \sum_{i\in F} \lambda_i e_i.$$

Mostre que existe uma norma para E.

Questão 4. Mostre que $\mathcal{C}_{L_2}([0,2])$ o espaço das funções contínuas do espaço compacto $[0,2]$ em $\mathbb{C}$, com a norma

$$||f|| = \left\{\int_0^2 |f(t)|^2 dt\right\}^{1/2}$$

não é um espaço completo.

Para casa. Entregar na próxima aula. Vale até 1.0 ponto a mais na média final, desde que seja bem feito.

(12) Seja $m > 0$ um número natural fixado. Mostre que entre todos os polinômios $P \in \mathbb{C}[X]$ de grau $\leq m$ tais que $P(0) = 1$, existe um que torna mínimo o valor

$$\int_0^1 |P(t)| dt.$$

Mostre todas as afirmações que sejam necessárias para resolver a questão. Observe que $\{P : P(0) = 0\}$ é um subespaço, completo, convexo, e sua translação .....