8. Terceira Prova (peso 3) MAT 0334 30/6/2015

Antonio de Padua.

Questão 1. (3,0 pontos) Determinar os pontos em que podemos assegurar a convergência da série de Fourier das seguintes funções, definidas no intervalo $[-\pi, \pi[$, e dar o valor da soma de sua série de Fourier, **justificando adequadamente**:

$$f(t) = e^{at},\ g(t) = |\sin t|,\ h(t) = t^2 - 1,\ q(t) = t^3 \sin\frac{1}{t^2},\ p(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad -\pi < t < 0, \\ \cos t & \text{para} \quad 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Questão 2. (2,0 pontos) Mostre que o operador "right-shift" $R : l_2(N) \longrightarrow l_2(N)$ definido por

$$R(\langle x_1, x_2, ..., x_n, ...\rangle) = \langle 0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\rangle$$

é um operador limitado em $l_2(N)$ e ache sua norma.

Questão 3. (2,0 pontos) Fixe $x = \langle x_1, x_2, ..., x_n, ...\rangle \in l_\infty(N)$. Mostre que o operador $M : l_2(N) \longrightarrow l_2(N)$ definido por

$$M_x(y) = \langle x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n, ...\rangle$$

é um operador limitado em $l_2(N)$ e que $||M_x|| = ||x||_\infty$.

Questão 4. (3,0 pontos) Seja M um sub-espaço do espaço linear normado $(X, |...|)$ e $x \in X$ tal que

$$d = d(x, M) = \inf_{y \in M} |x - y| > 0.$$

Mostre que existe um $x^* \in X^*$ tal que $||x^*|| = 1$ e $x^*(x) = d$ e finalmente $x^*(m) = 0$ para cada $m \in M$.