Prova 2 – TEORIA DE GALOIS – IME-USP – 2015

Prof. Paulo Agozzini Martin

1. (Valor: 1.0 pontos) Se $K = \mathbb{C}(x_1, x_2, x_3)$ e $k_0 = \mathbb{C}(s_1, s_2, s_3)$, considere $g = x_1x_2 \in K$. Encontre $\mathfrak{S}_g$. Se $f = x_1 + x_2$, mostre que toda permutação que fixa g também fixa f e reciprocamente. Pelo que vimos em classe, devemos ter $k_0(f) = k_0(g)$. Mostre, diretamente, que $g \in k_0(f)$ e $f \in k_0(g)$.

2. (Valor: 1,0 pontos) Sejam $K = \mathbb{C}(x_1, x_2)$, $k_0 = \mathbb{C}(s_1, s_2)$ e $g = x_1 + 2x_2 \in K$. Mostre, calculando explicitamente, que x_1 e x_2 estão em $k_0(g)$ e conclua que $K = k_0(g)$.

3. (Valor: 2.0 pontos) Sejam H um subgrupo qualquer de $\mathfrak{S}_n$ e $u = x_1x_2^2 \cdots x_n^n$. Se

$$g = \sum_{\sigma \in H} \sigma \cdot u,$$

mostre que $H = \mathfrak{S}_g$.

4. (Valor: 2.0 pontos) Faça explicitamente a correspondência de Galois entre os subcorpos de K/k_0 (onde $K = \mathbb{C}(x_1, x_2, x_3)$, $k_0 = \mathbb{C}(s_1, s_2, s_3)$) e os subgrupos de $\mathfrak{S}_3$. Para cada subcorpo encontrado, dê explicitamente um elemento primitivo sobre k_0.

5. (Valor: 2.0 pontos) Assumindo os resultados sobre grupos vistos em classe, mostre que se $f \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ é tal que a órbita de f sob $\mathfrak{S}_n$ possui exatamente dois elementos, então $f = a + b\sqrt{\Delta}$ onde $a, b \in \mathbb{C}(s_1, \ldots, s_n)$ e $b \neq 0$.

6. (Valor: 2.0 pontos) Seja $f \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ uma função tal que $f \notin k_0$ e tal que existe um primo p para o qual

$$f(x_1, \ldots, x_n)^p = g(x_1, \ldots, x_n) \in k_0.$$

Mostre que $p = 2$ e que $f = b\sqrt{\Delta}$, para certa $b \neq 0$ em k_0.

[Sugestão: mostre inicialmente que existe uma transposição σ que não fixa f. Pondo $\sigma \cdot f = f_2$, temos $f \neq f_2$. Mostre que $f_2 = \omega f$, para certa raiz p-ésima da unidade ω.]