Prova 3 – TEORIA DE GALOIS – IME-USP – 2015

Prof. Paulo Agozzini Martin

1. (Valor: 1.0 pontos) Se $0 < \alpha < 1$ for um número real e algébrico, mostre que $\ln(\alpha)$ não pode ser um número racional.

2. (Valor: 1.5 pontos) Seja $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinômio irredutível de grau 3 que é uma função crescente de $x \in \mathbb{R}$. Encontre $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, onde $K/\mathbb{Q}$ é um corpo de decomposição de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ (você pode supor que K está contido no corpo dos números complexos).

3. (Valor: 1.0 pontos) Dê um exemplo de uma torre de corpos $\mathbb{Q} \subset K \subset E$ tal que $K/\mathbb{Q}$ e E/K são extensões normais, mas $E/\mathbb{Q}$ não é uma extensão normal.

4. (Valor: 2,5 pontos) Considere o polinômio $f(x) = x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e seja $K/\mathbb{Q}$ o corpo de decomposição de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ (você pode supor que $K \subset \mathbb{C}$).

1. Mostre que $K = \mathbb{Q}(\omega)$, para certa raiz da unidade ω.
2. Mostre que $f(x)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.
3. Encontre $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ e determine a sua estrutura.

5. (Valor: 2.0 pontos) Sejam F um corpo qualquer e L/F uma extensão algébrica com a seguinte propriedade: qualquer que seja a extensão finita E/F, existe um morfismo $\tau \colon E \to L$ sobre F. Mostre que L é um fecho algébrico de F.

6. (Valor: 2.0 pontos) Seja $\zeta = e^{2\pi i/5}$ (uma raiz quinta primitiva da unidade). Nostre que o polinômio $x^5 - 2$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}(\zeta)$ e conclua que $[K : \mathbb{Q}] = 20$, onde K é o corpo de decomposição de $x^5 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$.