PROVA IV - TEORIA DE GALOIS - IME - USP - 2015

PROF. PAULO A. MARTIN

1. (valor 2.0 pontos) Seja $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinômio de grau $n \geq 2$ e $K/\mathbb{Q}$ o seu corpo de decomposição sobre $\mathbb{Q}$, que podemos supor contido no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Mostre que $f(x)$ é irredutível se, e somente se, quaisquer que sejam as raízes α e β de $f(x)$ em K, existir um $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma(\alpha) = \beta$.

2. (valor 2.5 pontos) Seja $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ um fecho algébrico de $\mathbb{Q}$ e $M = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{R}$.

(1) Se L/M é uma extensão finita com $L \neq M$, mostre que $[L : M] = 2$.

(2) É verdade que todo elemento $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ se escreve como $\alpha = a + bi$ onde $a, b \in M$?

3. (valor 3.0 pontos) Seja $f(x) = x^3 + 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e $K/\mathbb{Q}$ o corpo de decomposição de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ (que podemos supor contido em $\mathbb{C}$). Encontre $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, todos os seus subgrupos e todos os correspondentes subcorpos de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ na correspondência de Galois. Para cada subcorpo, encontre um elemento primitivo.

4. (valor 2.5 pontos) Sejam $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinômio irredutível de grau 5 e $K/\mathbb{Q}$ um corpo de decomposição de $f(x)$ contido em $\mathbb{C}$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ denotam as cinco raízes de $f(x)$ em K, sabe-se que $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \subsetneq K$. Mostre que $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \mathfrak{S}_5$.