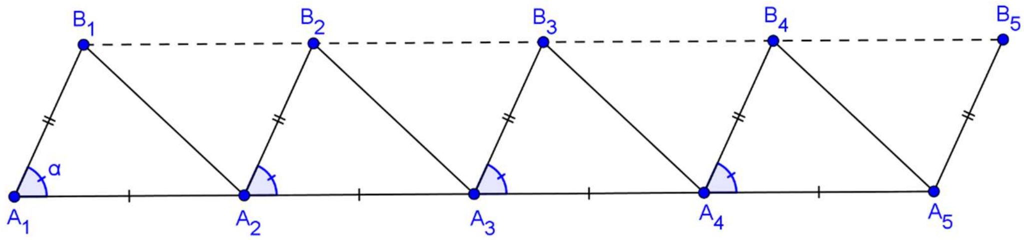
MAT0421 – PROJETO 1

1. Esta é uma prova do teorema de Saccheri-Legendre. Justifique cada passagem.

(a) Numa geometria neutra plana considere um triângulo $A_1A_2B_1$. Sendo $\alpha = m(\angle A_1)$, $\beta = m(\angle A_2)$ e $\gamma = m(\angle B_1)$, provaremos que $\alpha + \beta + \gamma \leq 180$.

(b) Construa, como na figura abaixo, uma cadeia de triângulos $A_jA_{j+1}B_j$, com $j = 2,\ldots, n$, congruentes ao triângulo dado.

(c) Os triângulos $B_jB_{j+1}A_{j+1}$, com $j = 2,\ldots, n$, são congruentes ao triângulo $B_1B_2A_2$, o último pela construção de B_{n+1}.



(d) Sendo $\delta = m(\angle B_1A_2B_2)$, afirmamos que $\gamma \leq \delta$. Com efeito, suponha, por absurdo, que $\gamma > \delta$. Então $A_1A_2 > B_1B_2$.

(e) Logo, $A_1B_1 + nB_1B_2 + B_{n+1}A_{n+1} \geq nA_1A_2$.

(f) Portanto, $2A_1B_1 \geq n(A_1A_2 - B_1B_2)$.

(g) Como n é arbitrário, obtém-se uma contradição. Qual?

(h) Conclui-se que $\alpha + \beta + \gamma \leq 180$.

2. Numa geometria neutra plana considere um triângulo arbitrário ABC. Mostre que se B pertence à circunferência Γ de diâmetro $\overline{AC}$ então $m(\angle ABC) = 90 - \frac{1}{2}\,\delta(\Delta ABC)$. Em particular, conclua que $m(\angle ABC) \leq 90$. (Sugestão: Utilize a propriedade aditiva do defeito. Lembre-se que $\delta(\Delta ABC) = 180 - [m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C)]$.)

3. Numa geometria neutra plana, mostre que:

(a) se $\delta(\Delta ABC) = d$ para todo triângulo ABC então $d = 0$;

(b) se existe um triângulo $A_0B_0C_0$ tal que $\delta(\Delta A_0B_0C_0) \leq \delta(\Delta ABC)$ para todo triângulo ABC então $\delta(\Delta A_0B_0C_0) = 0$.

4. Numa geometria neutra plana, sejam A, B e C três pontos distintos pertencentes a uma circunferência de centro O tais que O e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Mostre que $m(\angle ABC) \leq \frac{1}{2}\,m(\angle AOC)$. (Sugestão: Analise, em separado, os casos $O \in \text{int}(\angle ABC)$ e $O \notin \text{int}(\angle ABC)$. Neste último, discuta as possibilidades $B - O - C$ e $B - O - A$.)

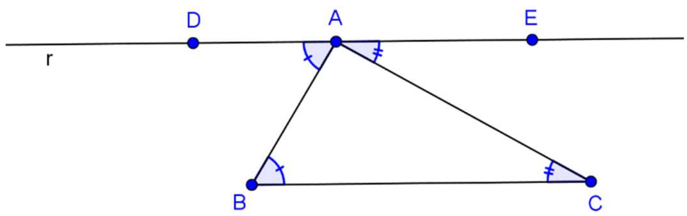
5. Numa geometria de Hilbert plana, sejam D e E os pontos médios dos lados AB e CA, respectivamente, de um dado triângulo ABC. Mostre que se G e H são as projeções ortogonais de B e C, respectivamente, sobre $\overleftrightarrow{DE}$, então $\square GBCH$ é um quadrilátero de Saccheri com base superior BC e base inferior HG. Supondo válido o postulado de Arquimedes, verifique que $\delta(\square GBCH) = \delta(\Delta ABC)$. (Sugestão: Considere a projeção ortogonal F de A sobre $\overleftrightarrow{DE}$ e analise, separadamente, as cinco possibilidades: $F - G - H$, $F = G$, $G - F - H$, $F = H$ e $G - H - F$.)

6. Utilize o exercício anterior para mostrar que, numa geometria neutra plana, as seguintes proposições são equivalentes:
(a) existe um triângulo ABC tal que $\delta(\Delta ABC) = 0$;
(b) existe um retângulo;
(c) para todo triângulo ABC, tem-se $\delta(\Delta ABC) = 0$.

7. Numa geometria de Hilbert plana, sejam D e E os pontos médios dos lados AB e CA, respectivamente, de um dado triângulo ABC. Mostre que $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$. Supondo válido o postulado de Arquimedes, verifique que $DE \leq \frac{1}{2} BC$.

8. Numa geometria neutra plana, suponha $\overleftrightarrow{PA} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e seja $\varepsilon > 0$ um dado número real. Mostre que existe $R \in \overrightarrow{AB} - \{A\}$ tal que $m(\angle PRA) < \varepsilon$. (Sugestão: Considere $R_1 \in \overrightarrow{AB} - \{A\}$ tal que $\overline{PA} \cong \overline{AR_1}$ e verifique que $m(\angle PR_1A) \leq \frac{90}{2}$. Sendo R_2 tal que $Q - R_1 - R_2$ e $\overline{PR_1} \cong \overline{R_1R_2}$, mostre que $m(\angle PR_2A) \leq \frac{90}{2^2}$. Prossiga o argumento considerando R_3, R_4, e assim por diante.)

9. Este exercício propõe uma prova direta da equivalência, numa geometria neutra plana, das seguintes proposições:
(a) para toda reta r e todo ponto P fora de r, no máximo uma reta passa por P e é paralela a r (postulado euclidiano das paralelas);
(b) para todo triângulo ABC, tem-se $\delta(\Delta ABC) = 0$.
(Sugestão: Para (a) $\Rightarrow$ (b), seja r a reta que passa por A e é paralela à reta BC e utilize a ideia ilustrada na figura abaixo.



Para a implicação (b) $\Rightarrow$ (a), utilize o argumento abaixo. Justifique cada passagem.
(1) Dados uma reta r e um ponto P fora de r considere a reta s que passa por P e é perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ onde Q é a projeção ortogonal de P sobre r. Então $r \,//\, s$.
(2) Vamos mostrar que s é a única reta que passa por P e é paralela a r. Sendo t uma reta arbitrária passando por P, t distinta de s e de $\overleftrightarrow{PQ}$, escolha $X \in s$ e $Y \in t$, com X e Y distintos de P, tais que $Y \in \mathrm{int}(\angle QPX)$.
(3) Como $\angle QPY$ é um ângulo agudo, se $S \in r$ é tal que S e Y estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{PQ}$, então existe $R \in \overrightarrow{QS} - \{Q\}$ tal que $m(\angle PRQ) < \varepsilon$ onde $\varepsilon = 90 - m(\angle QPY)$.
(4) Porém, $m(\angle QPR) + m(\angle PRQ) = 90$ e, portanto, $m(\angle QPY) < m(\angle QPR)$.
(5) Assim, $Y \in \mathrm{int}(\angle QPR)$ de modo que $\overrightarrow{PY}$ intersecta $\overline{QR}$. Conclui-se que $t \cap r \neq \varnothing$ e s é a única reta que passa por P e é paralela a r.)