

EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

NOME: GABARITO NO. USP: _____

Questão 1) (2,0)

(a) (0,6) Determine como escrever $\frac{1}{n}$ como soma de duas frações unitárias, sendo $\frac{1}{n+1}$ uma delas.(b) (0,7) Se n é ímpar, mostre que é possível escrever $\frac{2}{n}$ como soma de duas frações unitárias.

Muitos dos registros do Papiro de Rhind podem ser obtidos desta maneira.

(c) (0,7) Escreva $\frac{2}{93}$ como soma de duas frações unitárias. (Obs.: A decomposição $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ não é aceita).

$$(a) \text{ temos } \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = n(n+1), \text{ como } n \in \mathbb{N}, n(n+1) \in \mathbb{N}$$

Logo de fato $x \in \mathbb{N}$

$$\therefore \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Note que da resposta (a) temos:

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo vale para todo n ímpar.

Note que se n é ímpar, $n+1$ é par. Deí $n+1=2k$, $k \in \mathbb{N}^+$

Logo $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$

Note que se n é ímpar $n(n+1)$ é par, pois par $\times$ ímpar é sempre par.

Deí $n(n+1)=2l$, $l \in \mathbb{N}$

Logo $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$

Como $\forall x \in \mathbb{N}$ temos $\frac{2}{x} = \frac{1}{\frac{x}{2}}$

temos $\frac{2}{n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$, $x \in \mathbb{N}$

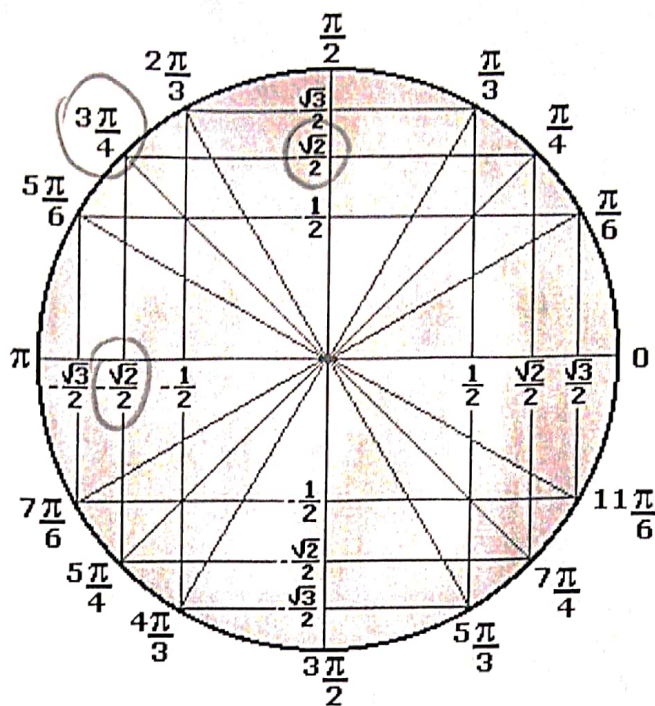
$\therefore$ se n é ímpar $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ onde } x = \frac{n+1}{2} \text{ e } y = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c) Como 93 é ímpar utilizo a resposta (b):

$$\text{Logo } \frac{2}{93} = \frac{1}{\frac{93+1}{2}} + \frac{1}{\frac{93(93+1)}{2}} \quad x = \frac{n+1}{2} \text{ e } y = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \frac{2}{93} = \frac{1}{47} + \frac{1}{4371}$$



Questão 2) (2,0)

(a) (1,0) Determine a *forma polar* do número complexo $z = \frac{2i}{1-i}$.

(b) (1,0) Encontre todas as soluções da equação $w^5 = \frac{2i}{1-i}$.

$$(a) \text{ Temos } z = \frac{2i}{1-i} \times \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{2i + 2i^2}{1+1} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Logo } z = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{lembrar!} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right|$$

Note q-e se $(\cos \theta, \sin \theta) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

temos $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*$

$$\therefore z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

(b) Temos $w^5 = z^{(*)}$, z de resposta (a)

Sabemos que para $w^n = z = r^{1/n} (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$,

onde $\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ e $k = 0, 1, \dots, n-1$, para r e θ de z .

Logo para (*): $(\sqrt{2})^{1/5} = 2^{1/10}$

$$\theta_0 = \frac{\frac{3\pi}{4} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{5} = \frac{3\pi}{20}$$

$$\theta_1 = \frac{\frac{3\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{5} = \frac{\frac{3\pi + 8\pi}{4}}{5} = \frac{11\pi}{20}$$

$$\text{Note que } \theta_1 - \theta_0 = \frac{8\pi}{20}$$

$$\text{Logo } \theta_k = \theta_{k-1} + \frac{8\pi}{20}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{Já } \theta_2 = \frac{11\pi}{20} + \frac{8\pi}{20} = \frac{19\pi}{20}; \quad \theta_3 = \frac{19\pi}{20} + \frac{8\pi}{20} = \frac{27\pi}{20}$$

$$\theta_4 = \frac{27\pi}{20} + \frac{8\pi}{20} = \frac{35\pi}{20}$$

$\therefore$ As 5 raízes de (*) são

$$w_0 = 2^{1/10} \left(\cos \frac{3\pi}{20} + i \sin \frac{3\pi}{20} \right); w_1 = 2^{1/10} \left(\cos \frac{11\pi}{20} + i \sin \frac{11\pi}{20} \right)$$

$$w_2 = 2^{1/10} \left(\cos \frac{19\pi}{20} + i \sin \frac{19\pi}{20} \right); w_3 = 2^{1/10} \left(\cos \frac{27\pi}{20} + i \sin \frac{27\pi}{20} \right)$$

$$w_4 = 2^{1/10} \left(\cos \frac{35\pi}{20} + i \sin \frac{35\pi}{20} \right)$$

Questão 3) (4,0)

(a) (2,0) Determine a área do triângulo cujos vértices são soluções da equação $z^3 + z^2 + z = 0$.

(b) (2,0) Seja $w = \frac{1-z}{1+z}$. Se $|z| < 1$, mostre que $\text{Re}(w) > 0$.

$$(a) \text{ Temos } z^3 + z^2 + z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + z + 1) = 0$$

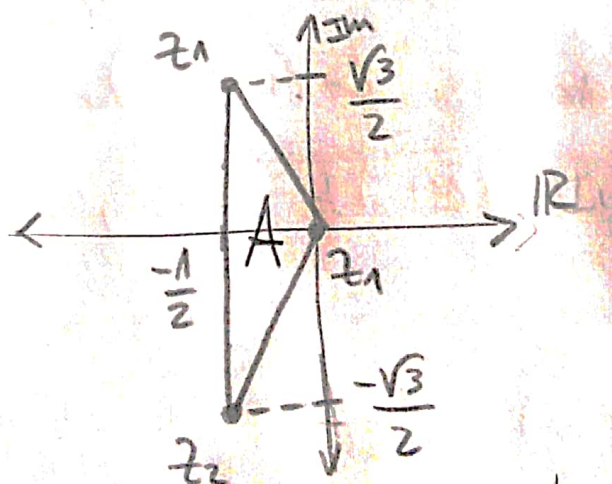
$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z^2 + z + 1 = 0$$

Logo $z^2 + z + 1 = 0$, por Bhaskara Temos

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore z_0 = 0 \text{ ou } z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ ou } z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Temos



Note que uma das alturas do triângulo A é $\frac{1}{2}$ pois a base é a distância entre z_1 e z_2 ,

$$\text{ou seja, } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{Área (A)} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(b) Se $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ $1 - z + |z|^2$

temos $w = \frac{1 - (a + bi)}{1 + (a + bi)} = \frac{(1 - a) - bi}{(1 + a) + bi} \times \frac{(1 + a) - bi}{(1 + a) - bi}$

$\Rightarrow w = \frac{1 - a^2 - 2bi - b^2}{(1 + a)^2 + b^2} = \frac{1 - (a^2 + b^2) - 2bi}{(1 + a)^2 + b^2}$

Logo $\operatorname{Re}(w) = \frac{1 - (a^2 + b^2)}{(1 + a)^2 + b^2}$

Temos se $|z| < 1 \Leftrightarrow |a + bi| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < 1$
 $\Rightarrow 0 < a^2 + b^2 < 1$ (*)

Por (*) temos $1 - (a^2 + b^2) > 0$ e

(*) note que $(1 + a)^2 + b^2 > 0$, pois $\forall x, y \in \mathbb{R}$
 $x^2 + y^2 > 0$

Daí $\operatorname{Re}(w) > 0$.

$\therefore$ se $|z| < 1 \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1 - z}{1 + z}\right) > 0$

Questão 4) (2,0) Determine o menor $n \in \mathbb{N}$ para o qual:

(a) $(1,0) (1 - \sqrt{3}i)^n \in \mathbb{R}$.

(b) $(1,0) (1 - \sqrt{3}i)^n$ é imaginário puro.

(c) seja $z = 1 - \sqrt{3}i \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\Leftrightarrow z = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

Note que se $(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

então $\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Daí } z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow z^n = 2^n \left(\cos \frac{5\pi}{3} \cdot n + i \sin \frac{5\pi}{3} \cdot n \right)$$

(a) Logo $z^n \in \mathbb{R}$ se $\sin \left(\frac{5\pi}{3} \cdot n \right) = 0$, $\frac{5\pi \cdot n}{3} =$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{3} \cdot n = k\pi, k \in \mathbb{N} \quad (1+2)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3k}{5}, \text{ se } k=5 \Rightarrow n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ é o menor possível}$$

Daí $n=3$

4

$\therefore (1 - \sqrt{3}i)^3 \in \mathbb{R}$, 3 é o menor expoente possível para isso acontecer.

(b) Logo z^n é imaginário puro

$$\text{se } \cos\left(\frac{5\pi}{3} \cdot n\right) = 0 \Rightarrow \frac{5\pi}{3} \cdot n = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{3} \cdot n = \frac{\pi + 2k\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3} n = \frac{1+2k}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3+6k}{10} = \frac{3(1+2k)}{10}$$

Note que $3(1+2k)$ é ímpar pois, ~~para~~
Todo x e y ímpares xy é ímpar.

Logo, e como 10 é par, $n \notin \mathbb{N}$

$\therefore$ Não existe $n \in \mathbb{N} : (1-\sqrt{3}i)^n$ seja um
imaginário puro.