

Terceira Prova – 13/12/2022

Nome: GABARITO. N.USP _____

Em todas as questões, justifique suas respostas!

Questão 1) (1,5) Um tablete de doce de leite (formato de caixa retangular) medindo 12cm por 9cm por 6cm está inteiramente coberto com papel laminado. Esse tablete é dividido em cubos com 1cm de aresta.

- (a) (0,3) Quantos desses cubos possuem três faces cobertas com papel laminado?
- (b) (0,4) Quantos desses cubos possuem exatamente duas faces cobertas com papel laminado?
- (c) (0,4) Quantos desses cubos possuem apenas uma face coberta com papel laminado?
- (d) (0,4) Quantos desses cubos não possuem nenhuma face coberta com papel laminado?

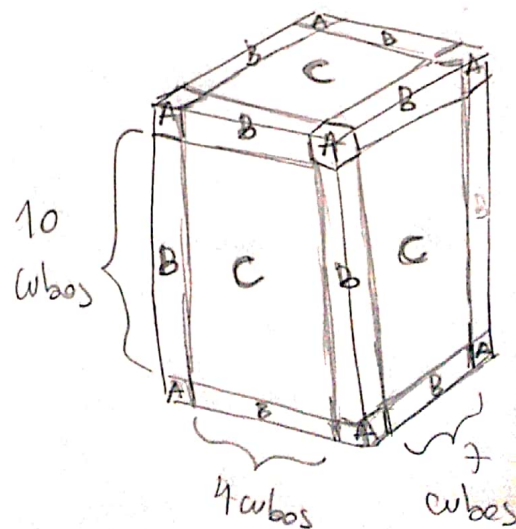
Note, como este é dividido em cubos de 1cm de aresta. Temos 12 cubos de altura, 9 cubos de largura e 6 cubos de comprimento.

(A) Os 8 cubos presentes nos 8 vertices da caixa.

(B) São os cubos presentes nos 12 arestas da caixa, tirando os cubos dos vertices.

$$\begin{aligned} \text{Dai: } & 10 \times 4 + 7 \times 4 + 4 \times 4 \\ & = (10 + 7 + 4) \times 4 \\ & = 21 \times 4 = 84. \end{aligned}$$

∴ São 84 cubos com exatamente 2 faces cobertas



(C) São os cubos presentes na casca da caixa, tirando os cubos dos vértices e arestas.

$$\text{Daí: } (10 \times 7) \times 2 + (10 \times 4) \times 2 + (7 \times 4) \times 2 \\ = (70 + 40 + 28) \times 2 = 138 \times 2 = 276$$

∴ São 276 caixas com apenas uma face coberta.

(D) São os cubos que não estão presentes na casca da caixa, ou seja, são todos os cubos da caixa ($12 \times 9 \times 6$ cubos) menos os da casca ($A + B + C$).

$$\text{Daí: } 12 \times 9 \times 6 - (8 + 84 + 276) \\ = 648 - 368 = 280$$

∴ São 280 caixas sem nenhuma face coberta.

Questão 2) (2,5)

- (a) (0,5) Quantos são os números naturais de 7 algarismos?
 (b) (1,0) Quantos são os números naturais de 7 algarismos nos quais o algarismo 4 figura?
 (c) (1,0) Quantos são os números naturais de 7 algarismos nos quais o algarismo 4 figura exatamente 3 vezes e o algarismo 8 exatamente 2 vezes?

(a) $\frac{\times 9}{\neq 0} \frac{\times 10}{\neq 0} \frac{\times 10}{\neq 0} \frac{\times 10}{\neq 0} \frac{\times 10}{\neq 0} \frac{\times 10}{\neq 0} \frac{\times 10}{\neq 0}$

$\therefore \left(\begin{array}{l} \text{Números IN} \\ \text{c/ 7 algarismos} \end{array} \right) = 10^6 \times 9 = 9.000.000$

(b)

1º Vou contar quantos naturais de 7 algar. não possuem o algarismo 4.

Temos: $\frac{\times 8}{\neq 0} \frac{\times 9}{\neq 4} \frac{\times 9}{\neq 4} \frac{\times 9}{\neq 4} \frac{\times 9}{\neq 4} \frac{\times 9}{\neq 4} \frac{\times 9}{\neq 4}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Núm. IN / 4 não} \\ \text{c/ 7 algar. / figura} \end{array} \right) = 9^6 \times 8 = 4.251.528$

Note que $\left(\begin{array}{l} \text{Núm. IN / 4} \\ \text{c/ 7 algar. / figura} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Núm. IN} \\ \text{c/ 7 algar.} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Núm. IN / 4 não} \\ \text{c/ 7 algar. / figura} \end{array} \right)$

$\therefore \left(\begin{array}{l} \text{Números IN} \\ \text{c/ 7 algarismos / figura} \end{array} \right) = 4.748.472$

$= 10^6 \times 9 - 9^6 \times 8$

(c) Vou analisar 3 casos que se diferenciam principalmente pelo valor do primeiro algarismo. Temos

I: $\frac{\times 7}{\neq 0} \frac{4}{\neq 4} \frac{4}{\neq 4} \frac{4}{\neq 4} \frac{8}{\neq 4} \frac{8}{\neq 4} \frac{\times 8}{\neq 8}$

$$\text{III: Logo (I)} = 7 \times 8 \times \frac{6!}{3!2!} = 56 \times 60$$

Obs: $\frac{6!}{3!2!}$ é o número de combinações

Logo (I) possíveis entre os últimos 6 algarismos com três algarismos 4 e dois algarismos 8.

$$\text{II: } \frac{4}{1} \mid \frac{4}{1} \frac{4}{1} \frac{8}{1} \frac{8}{1} \times 8 \times 8$$

$\neq 4 \neq 4$
 $\neq 8 \neq 8$

$$\text{Logo (II)} = 8^2 \times \frac{6!}{2!2!2!} = 8^2 \times 90$$

Obs: $\frac{6!}{2!2!2!}$: combinação de 6 algarismos com dois 4, dois algarismos de 8 e de 8

$$\text{III: } \frac{8}{1} \mid \frac{8}{1} \frac{4}{1} \frac{4}{1} \frac{4}{1} \times 8 \times 8$$

$\neq 4 \neq 4$
 $\neq 8 \neq 8$

$$\text{Logo (III)} = 8^2 \times \frac{6!}{3!2!} = 8^2 \times 60$$

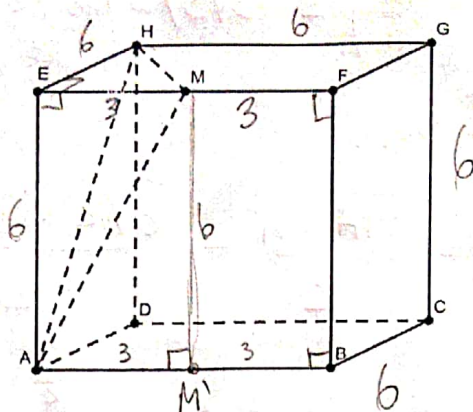
Obs: $\frac{6!}{3!2!}$: combinação de 6 algarismos com três algarismos 4 e dois algarismos 8.

Logo (I) + (II) + (III) são todas as possibilidades de números com 7 algarismos com três algarismos 4 e dois algarismos 8.

$$\therefore \left(\begin{array}{c|c} \text{Núm. IN} & \text{Exatidão} \\ \hline 9 \text{ algarismos} & 3 \text{ algarismos } 4 \\ & 2 \text{ algarismos } 8 \end{array} \right) = 56 \times 60 + 8^2 \times 90 + 8^2 \times 60 = 12.960$$

Questão 3) (3,0) No cubo ABCDEFGH, cuja aresta mede 6cm, o ponto M é ponto médio de EF.

Sejam $A(X)$
a área de X ;
 $V(X)$ o volume
de X e M' o ponto
médio de AB .



(a) (1,0) Calcule o volume da pirâmide AMHE.

(b) (1,0) Calcule a área do triângulo AMH. (Obs. O triângulo AMH não é retângulo!)

(c) (1,0) Calcule a medida da altura da pirâmide AMHE relativa à base AMH.

(a) Note $V(AMHE) = A(HME) \times \overline{EA} \times \frac{1}{3}$

Temos $A(HME) = \frac{\overline{HE} \times \overline{EM}}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$

$\bullet \overline{EA} = 6$

Logo $V(AMHE) = 9 \times 6 \times \frac{1}{3} = 18$

$\therefore V(AMHE) = 18 \text{ cm}^3$

(b) Temos $\bullet \overline{HA}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{EA}^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \times 6^2$

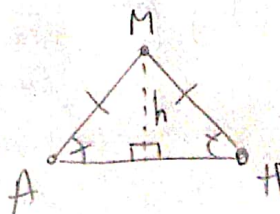
$\Rightarrow \overline{HA} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$

$\bullet \overline{AM}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{M'A}^2 = 6^2 + 3^2 = 2^2 \times 3^2 + 3^2 = 3^2(2^2 + 1) = 3^2(5)$

$\Rightarrow \overline{AM} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$

$\bullet \overline{MH}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{EH}^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow \overline{MH} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$

Note AMH é isósceles



temos $\overline{MA}^2 = h^2 + \left(\frac{\overline{HA}}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow h^2 = \overline{MA}^2 - \left(\frac{\overline{HA}}{2}\right)^2 = (3\sqrt{5})^2 - \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3^2 \times 5 - 3^2 \times 2 = 3^2(5-2)$$

$$\Rightarrow h = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Logo $A(\triangle AMH) = \frac{\overline{HA} \times h}{2} = \frac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}$

$\therefore A(\triangle AMH) = 9\sqrt{6} \text{ cm}^2$

(c) Note $V(\triangle AMHE) = \frac{A(\triangle AMH) \times h_{\triangle AMH}}{3}$,

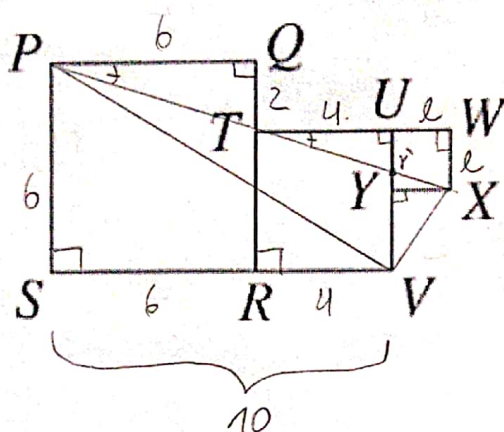
onde $h_{\triangle AMH}$ é a altura relativa à base $\triangle AMH$.

$$\Rightarrow h_{\triangle AMH} = \frac{3 \times V(\triangle AMHE)}{A(\triangle AMH)} = \frac{3 \times 18 \text{ cm}^3}{9\sqrt{6} \text{ cm}^2} = \frac{6 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \sqrt{6}} \text{ cm}$$

$\therefore h_{\triangle AMH} = \sqrt{6} \text{ cm}$

Questão 4) (2,0) Na figura abaixo, os quadrados PQRS, TUVR e UWXY são colocados em contato, lado a lado. Os pontos P, T e X estão sobre uma mesma reta. A área do quadrado PQRS é 36 e a do quadrado TUVR é 16. Qual é área do triângulo PXV?

- $A(PQRS) = 36$
 $\Rightarrow 6$ de aresta
- $A(TUVR) = 16$
 $\Rightarrow 4$ de aresta



Sejam Y' o ponto de interseção dos segmentos PX e UV , e l a aresta de $UWXY$.

Note $A(PXV) = A(Y'XV) + A(Y'PV)$,

$$A(Y'XV) = \frac{\overline{Y'V} \times l}{2} \quad \text{e} \quad A(Y'PV) = \frac{\overline{Y'V} \times 10}{2}$$

temos: $PQ \parallel TV \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{4}{\overline{Y'V}} \Rightarrow \overline{Y'V} = \frac{8}{b} = \frac{4}{3}$

$PQ \parallel WX \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{4+l}{l} \Rightarrow 6l = 8 + 2l \Rightarrow 4l = 8 \Rightarrow \boxed{l = 2}$

$\overline{Y'V} = \overline{UV} - \overline{Y'U} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \boxed{\frac{8}{3} = \overline{Y'V}}$

Logo, $A(Y'XV) = \frac{\frac{8}{3} \times 2}{2} = \frac{8}{3}$

$A(Y'PV) = \frac{\frac{8}{3} \times 10}{2} = \frac{40}{3}$

Dei, $A(PXV) = \frac{8}{3} + \frac{40}{3} = \frac{48}{3} \Rightarrow \boxed{A(PXV) = 16}$