MAT2351 - CÁLCULO I - VÁRIAS VARIÁVEIS - LICENCIATURA

1O SEM 2011 - PROFA. DANIELA M. VIEIRA

# SEGUNDA PROVA - GABARITO - 19/05/2011

**Questão 1** (2,0) Seja $f(x,y) = \ln(2x^2 + y^2)$.

**(a)** (1,0) Determine todos pontos nos quais a função $f$ é diferenciável.

Primeiramente observemos que $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Temos que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4x}{2x^2 + y^2}$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{2x^2 + y^2}$.

Ambas são contínuas em $D_f$, pois são soma e divisão de funções contínuas.

Portanto, $f$ é diferenciável em $D_f$, isto é, em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

**(b)** (1,0) Determine o plano tangente ao gráfico de $f$, no ponto $(-1, 2, \ln(6))$.

Do item anterior tiramos que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = \dfrac{-4}{2+4} = -\dfrac{2}{3}$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = \dfrac{4}{2+4} = \dfrac{2}{3}$.

Portanto, a equação do plano em $(-1, 2, \ln(6))$ é

$$\begin{aligned} z &= \ln(6) - \frac{2}{3}(x+1) + \frac{2}{3}(y-2) \\ &= -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \ln(6) - 2. \end{aligned}$$

**Questão 2** (2,0) Verifique se $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{0y^3}{0^2+y^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{x0^3}{x^2+0^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \\ &= \frac{hk^3}{h^2+k^2} \end{aligned}$$

e desta maneira

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{hk^3}{h^2+k^2\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h \underbrace{\frac{k^2}{h^2+k^2}}_{limitada} \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{limitada} = 0.$$

Portanto, $f$ é diferenciável em $(0,0)$.

**Questão 3** (2,0) $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva diferenciável que está contida na curva de nível 4 da função $f(x,y) = e^{2x-y} + 2x + 2y$. Determine uma equação da reta tangente a $\gamma$ no ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Embora não houvesse a necessidade de plotar a curva, claro que neste caso faz-se o uso de um software, segue uma interpretação geométrica do que estamos querendo resolver:

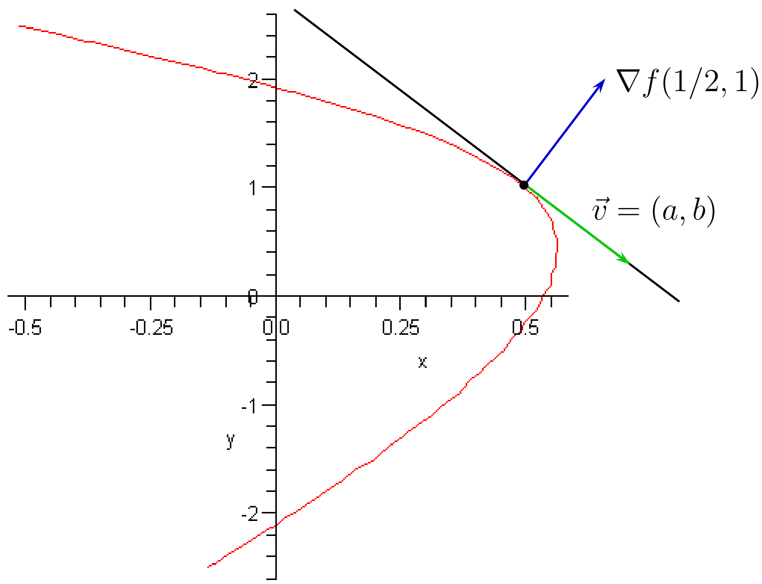


Figura 1: Curva de nível da $f$ no nível 4, gradiente da $f$ no ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e vetor diretor da reta tangente

Veja

$$\nabla f(x,y) = \left(2e^{2x-y} + 2, -e^{2x-y} + 2\right) \Rightarrow \nabla f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = (4,1).$$

Vamos determinar $\vec{v} = (a,b)$ de modo que $\vec{v} \perp (4,1)$, isto é,

$$(a,b).(4,1) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \Rightarrow b = -4a.$$

Logo, obtemos, $(a, -4a) = a(1,-4)$, desta forma, basta tomar $\vec{v} = (1,-4)$. Portanto, a equação da reta é

$$r: \left(\frac{1}{2}, 1\right) + \lambda(1,-4), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uma outra forma de determinar a reta seria fazer

$$\left(x - \frac{1}{2}, y - 1\right).(4,1) = 0 \Rightarrow y + 4x - 3 = 0.$$

**Questão 4** (2,0) $f$ é uma função diferenciável que satisfaz a equação $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que $f$ é constante no circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Consideremos uma parametrização da circunferência

$$z(t) = (\cos t, \sin t).$$

Queremos mostrar que $\dfrac{df(z(t))}{dt} = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{df(z(t))}{dt} &= \nabla f(z(t)).z'(t) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t), \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t)\right).(-\sin t, \cos t) \\
&= -\sin t\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \cos t\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t).
\end{aligned}$$

Por hipótese, temos $\sin t\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) - \cos t\dfrac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t) = 0$, logo, $\dfrac{df(z(t))}{dt} = 0$.

Portanto, $f$ é constante no circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

**Questão 5** (2,0) Considere a função $f(x,y) = 7e^{-x^2-3y^2}$.

**(a)** (1,0) Determine a taxa de variação de $f$ no ponto $P = (2,-1)$, na direção $3\vec{i} - 3\vec{j}$.

Observe

$$\vec{u} = \frac{(3,-3)}{\|(3,-3)\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,-1) &= \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,-1) \\
&= \nabla f(2,-1) \cdot \vec{u},
\end{aligned}$$

mais ainda,

$$\nabla f(x,y) = (-14xe^{-x^2-3y^2}, -42ye^{-x^2-3y^2}) \Rightarrow \nabla f(2,-1) = (-28e^{-7}, 42e^{-7}),$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,-1) = (-28e^{-7}, 42e^{-7}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -35e^{-7}\sqrt{2}.$$

**(b)** (1,0) Qual é a direção de maior crescimento de $f$ em $P$? Qual é a taxa máxima de variação em $P$?

Do item anterior tiramos que a direção de maior crescimento é $-28e^{-7}\vec{\imath} + 42e^{-7}\vec{\jmath}$.

Desta maneira teremos

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(2,-1)}{\|\nabla f(2,-1)\|} = \left(\frac{-28}{\sqrt{2548}}, \frac{42}{\sqrt{2548}}\right),$$

assim

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,-1) = (-28e^{-7}, 42e^{-7}) \cdot \left(\frac{-28}{\sqrt{2548}}, \frac{42}{\sqrt{2548}}\right) = \sqrt{2548}e^{-7} = 14\sqrt{13}e^{-7}.$$

BOA PROVA!