

EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

NOME: _____

NO. USP: _____

(1) Determine os pontos nos quais a função é contínua.

$$(a) \quad f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^2 + yz^2 + zx^2}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Solução: Temos que nos pontos $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, $f(x, y, z) = \frac{xy^2 + yz^2 + zx^2}{x^2 + y^2 + z^2}$; isto é, f é produto, soma e quociente de funções contínuas, logo contínua neste caso. Porém, no ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, o denominador de f é nulo. Mas observe que

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z) \\ &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} x \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} y \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} z \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= 0 = f(0, 0, 0). \end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em todo $\mathbb{R}^3$.

□

$$(b) \quad f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^2 + yz^2 + zx^2}{x^2 + y^2 + z^4} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Solução: Temos que nos pontos $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, $f(x, y, z) = \frac{xy^2 + yz^2 + zx^2}{x^2 + y^2 + z^4}$; isto é, f é produto, soma e quociente de funções contínuas, logo contínua neste caso. Porém, no ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, o denominador de f é nulo. Mas, desta forma consideremos $\gamma_1(t) = (0, t^2, t)$ e $\gamma_2(t) = (0, t, t)$, logo temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^4} = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^4} = 0.$$

Portanto, f é contínua $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Outra maneira: Suponhamos que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$ existe e seja L seu limite. Note que podemos escrever f da seguinte forma

$$f(x, y, z) = x \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^4} + y \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^4} + z \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^4},$$

e mais

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^4} \leq 1, \quad \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^4} \leq 1.$$

Logo, como o limite da primeira e terceira parcela do lado direito da igualdade acima existem, teremos que

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} y \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^4} = L - 0 - 0 = L,$$

ou seja, existiria. Porém isto é uma contradição, pois se considerarmos as curvas $\gamma_1(t) = (0, t^2, t)$ e $\gamma_2(t) = (0, t, t)$, teremos limites diferentes.

Portanto, é contradição que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$ existe.

□

$$(c) \quad (1,0) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solução: Temos que nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$; isto é, f é produto, soma e quociente de funções contínuas, logo contínua neste caso. Porém, no ponto $(x, y) = (0, 0)$, o denominador de f é nulo. Assim consideremos $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (t, t)$, logo temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma_2(t)).$$

Portanto, f é contínua $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

□

$$(d) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solução: Temos que nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; isto é, f é produto, soma e quociente de funções contínuas, logo contínua neste caso. Por outro lado, no ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, o denominador de f é nulo. Porém, observe que

$$y^2 \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$$

Logo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Portanto, f é contínua em todo $\mathbb{R}^2$. □

(2) Seja $f(x, y) = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

(a) (1,0) Determine e **desenhe** o domínio de f .

Solução: Veja que f está definida nos pontos tais que $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, isto é, $x^2 + y^2 \leq 1$. Logo

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

e visto no plano cartesiano como mostra a Figura 1a.

□

(b) (1,0) Determine e **desenhe** as curvas de nível de f .

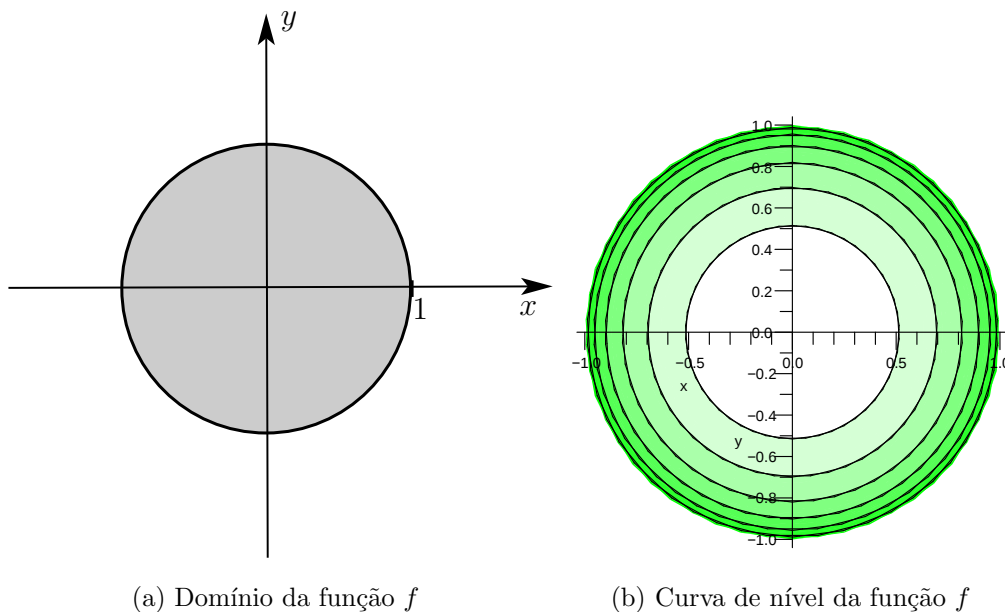
Solução: Observe que a imagem da função f é o intervalo $[0, 1]$, pois f é a parte inferior da esfera centrada na origem translada uma unidade acima sobre o eixo z . Desta forma, as curvas de nível são dadas por

$$1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} = c \Leftrightarrow 1 - c = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 = (1 - c)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - (1 - c)^2, \quad 0 \leq c \leq 1,$$

ou seja, as curvas de nível são circunferências centradas na origem de raio $\sqrt{1 - (1 - c)^2}$, $0 \leq c \leq 1$;

e isto no plano é dado pela Figura 1b

□



(a) Domínio da função f

(b) Curva de nível da função f

Figura 1:

(c) (1,0) Desenhe o **gráfico** de f .

Solução: Veja que

$$z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow z - 1 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow (z - 1)^2 = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1,$$

ou seja, é a esfera de raio 1 centrada no ponto $(0, 0, 1)$, mas olhando para a primeira equivalência acima vemos que é apenas a parte inferior da esfera.

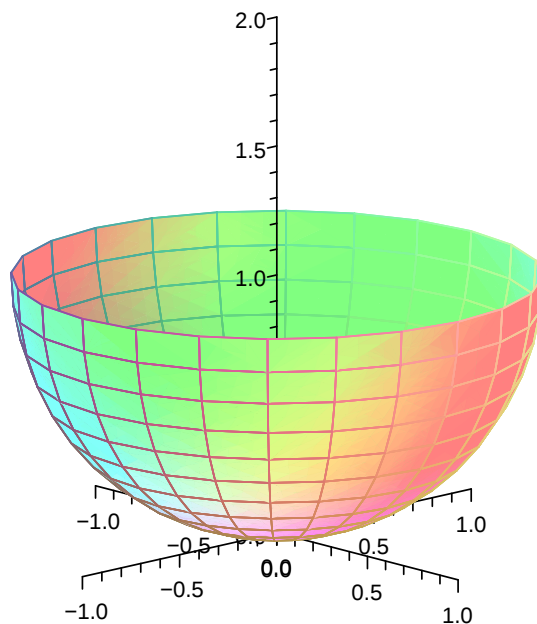


Figura 2: Gráfico da função f

□

(3) (3,0) Seja $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}$.

(a) (1,0) Determine e **desenhe** o domínio de f .

Solução: Veja que f está definida nos pontos tais que $x + y \geq 0$ e $x - y > 0$. Logo

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x \text{ e } y < x\},$$

e visto no plano cartesiano, temos

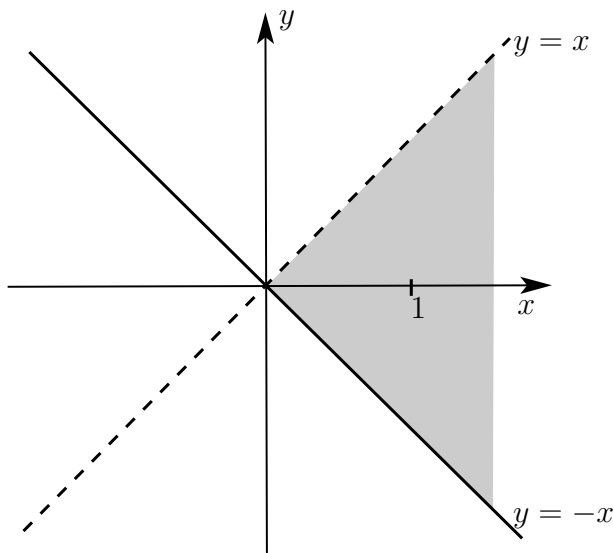


Figura 3: Domínio da função f

□

(a) (1,0) Determine e **desenhe** as curvas de nível de f .

Solução: Observe que a imagem da função f é o conjunto de todos os reais $z \geq 0$. Desta maneira, as curvas de nível são dadas por

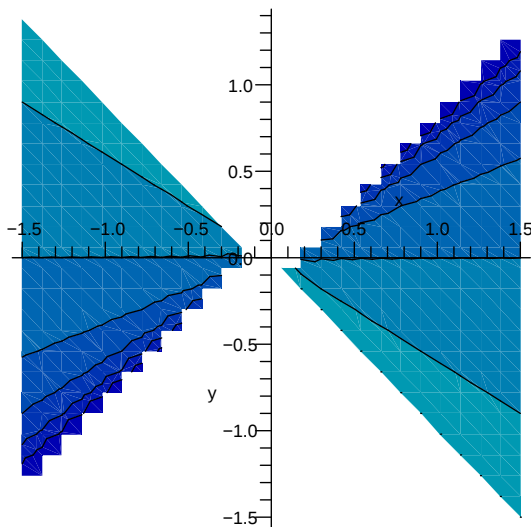
$$\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}} = c \Leftrightarrow \frac{x+y}{x-y} = c^2 \Leftrightarrow x+y = c^2(x-y) \Leftrightarrow y = \frac{c^2-1}{1+c^2}x, \quad c \geq 0,$$

ou seja, as curvas de nível¹ são retas passando pela origem de inclinação $\frac{c^2-1}{1+c^2}$, $c \geq 0$. Veja a Figura 4a.²

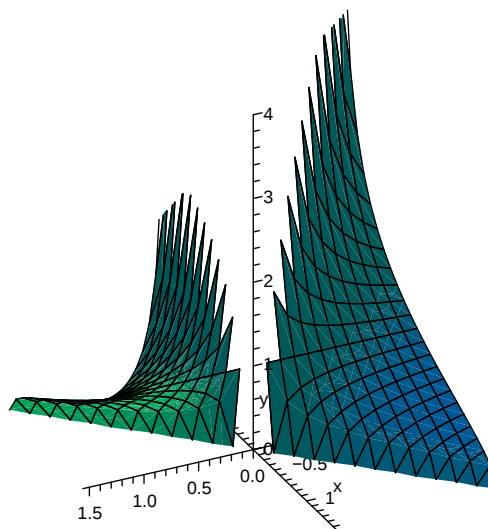
□

¹Conforme o valor de c aumenta as retas vão passando da cor clara para a escura

²O gráfico está presente apenas para visualização



(a) Curva de Nível



(b) Gráfico

(b) (1,0) Determine, caso exista, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Solução:

Consideremos as curvas $\gamma_0(t) = (t, -t)$ e $\gamma_1(t) = (t, 0)$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_0(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t + (-t)}}{\sqrt{t - (-t)}} = 0 \neq 1 = \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}},$$

logo os limites são diferentes. Logo, f não é contínua em $(0, 0)$.

Uma outra solução poderia ser: Pelas curvas de nível podemos dizer claramente que o limite não existe, pois toda curva de nível passa pela origem e sabemos que se tomarmos a curva de nível de nível c , $\gamma_c(t)$, teremos

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_c(t)) = c,$$

e isto quer dizer que se considerarmos a curva no nível $c = 0$, $\gamma_0(t) = (t, -t)$, que passa pela origem, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_0(t)) = 0;$$

por outro lado, se considerarmos a curva no nível $c = 1$, $\gamma_1(t) = (t, 0)$, que passa pela origem, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = 1,$$

logo os limites são diferentes. □