

TERCEIRA PROVA - GABARITO - 16/06/2011

Questão 1 (2,0) Seja $f(x, y) = \frac{1}{1 + 2x - y}$.

(a) (1,0) Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem de f .

Temos

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2}{(1 + 2x - y)^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{8}{(1 + 2x - y)^3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{4}{(1 + 2x - y)^3}, \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{(1 + 2x - y)^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{(1 + 2x - y)^3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{4}{(1 + 2x - y)^3}. \end{cases}$$

(b) (1,0) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f no ponto $(0, 0)$.

Do item anterior temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 8; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -4; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2.$$

Como $f(0, 0) = 1$, então o plano é

$$z = 1 - 2x + y + 4x^2 - 4yx + y^2.$$

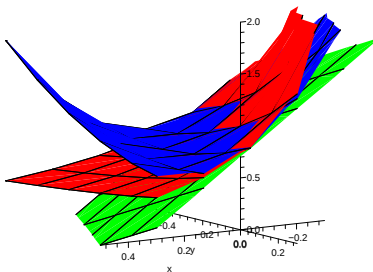


Figura 1: A função é a superfície vermelha, polinômio em azul e plano tangente em verde

Questão 2 (2,5) Classifique todos os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Temos

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3,$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3.$

Para encontrarmos seus pontos críticos basta resolvermos o sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0, \\ 3y^2 - 3 = 0, \end{cases}$$

donde concluimos que $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. Logo, temos os seguintes pontos críticos:

$$(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1).$$

Mais ainda

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y;$
- $H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy.$

Assim

- $H(-1, -1) = 36 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0;$
- $H(-1, 1) = -36 < 0;$
- $H(1, -1) = -36 < 0;$
- $H(1, 1) = 36 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0.$

Portanto, $(-1, -1)$ é ponto de máximo local, $(-1, 1)$ e $(1, -1)$ são pontos de sela, e $(1, 1)$ é ponto de mínimo.

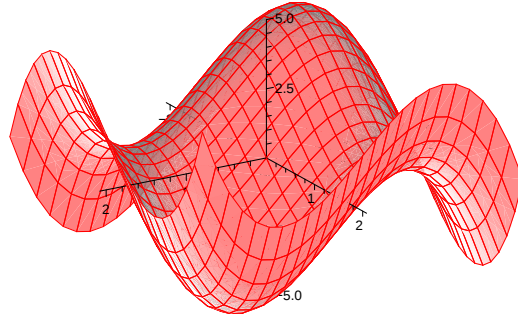


Figura 2: Função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Questão 3 (3,0) Determine os pontos de máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$, quando restrita ao compacto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.

Temos

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2$.

Para encontrarmos seus pontos críticos basta resolvermos o sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y - 2 = 0, \end{cases}$$

donde concluímos que $x = 1$ e $y = 1$. Logo, temos um único ponto crítico $(1, 1)$, e $f(1, 1) = 0$.

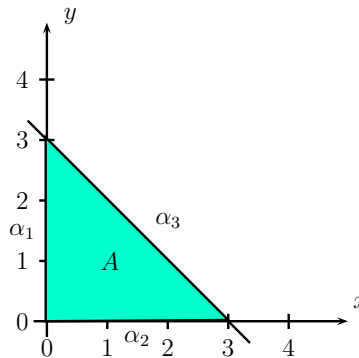


Figura 3: Compacto A .

Notemos que o conjunto A é compacto, e as parametrizações de suas fronteiras são dadas por:

- $\alpha_1(t) = (0, t), t \in [0, 3],$
- $\alpha_2(t) = (t, 0), t \in [0, 3],$
- $\alpha_3(t) = (t, 3 - t), t \in [0, 3].$

Sobre as fronteiras teremos

- $g_1(t) = f(\alpha_1(t)) = f(0, t) = t^2 - 2t + 2, t \in [0, 3],$
- $g_2(t) = f(\alpha_2(t)) = f(t, 0) = t^2 - 2t + 2, t \in [0, 3],$
- $g_3(t) = f(\alpha_3(t)) = f(t, 3 - t) = t^2 + (3 - t)^2 - 2t - 2(3 - t) + 2, t \in [0, 3],$

e desta maneira

- $g'_1(t) = 2t - 2,$
- $g'_2(t) = 2t - 2,$
- $g'_3(t) = 4t - 6.$

Então, g'_1 e g'_2 tem $t = 1$ como ponto crítico, enquanto que g'_3 tem $t = \frac{3}{2}$. Logo

- $g_1(0) = 2, g_1(1) = 1, g_1(3) = 5;$
- $g_2(0) = 2, g_2(1) = 1, g_2(3) = 5;$
- $g_3(0) = 5, g_3(3/2) = \frac{1}{2}, g_3(3) = 5.$

Logo, temos mínimo 0 que é dado pelo ponto crítico $(0, 0)$, e máximo 5, o qual na fronteira α_1 é dado no ponto $(0, 3)$ enquanto que na fronteira α_2 é dado no ponto $(3, 0)$.

Portanto, temos mínimo no ponto $(1, 1)$ e máximo nos ponto $(0, 3)$ e $(3, 0)$.

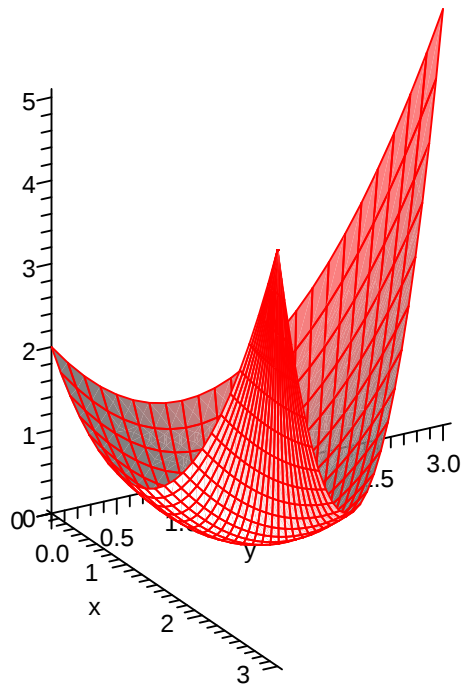


Figura 4: Função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$.

Questão 4 (2,5) Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que estão mais próximo e mais distante do ponto $(0, 2, -2)$.

Utilizaremos os multiplicadores de Lagrange para poder resolver o exercício. Desta maneira, vamos considerar

- $f(x, y, z) = x^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2$,
- $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$.

Então teremos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x, 2y - 4, 2z + 4) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ \nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda x \\ y - 2 = \lambda y \\ z + 2 = \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ \nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \end{array} \right. .$$

Da primeira equação tiramos que $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Suponhamos que $\lambda = 1$, substituindo na segunda e terceira equação teremos $0 = -2$ e $0 = 2$, um absurdo. Portanto, $\lambda \neq 1$ e $x = 0$. Veja, olhando para a segunda e terceira equação tiramos que

$$y = \frac{2}{1-\lambda} \text{ e } z = -\frac{2}{1-\lambda},$$

substituindo y , z e $x = 0$ na terceira equação temos

$$0^2 + \left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{2}{1-\lambda}\right)^2 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = 3.$$

Para $\lambda_1 = -1$ teremos $(0, -1, 1)$, e $\lambda_2 = 3$ teremos $(0, 1, -1)$. Logo, $f(0, -1, 1) = 18$ e $f(0, 1, -1) = 2$, portanto, $(0, -1, 1)$ está mais longe e $(0, 1, -1)$ está mais próximo.

Observemos que se $\nabla g(x, y, z) = (0, 0, 0)$, então $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, porém $(0, 0, 0)$ não está sobre a esfera.

PESSOAL, FOI MUITO LEGAL CONHECER VOCÊS!

BOA SORTE!