

PROVA SUBSTITUTIVA - GABARITO- 30/06/2011

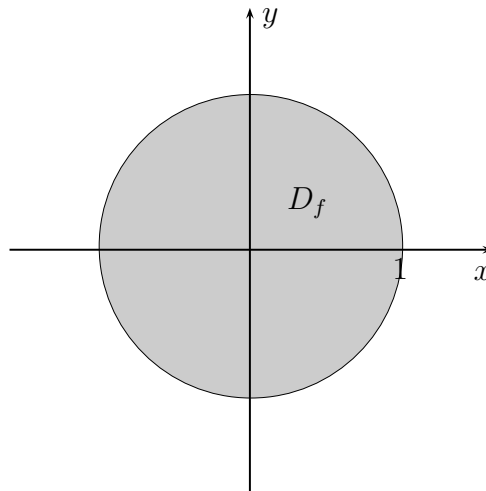
EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

Questão 1 (2,5) Seja $f(x, y) = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.**(a)** (0,5) Determine e **desenhe** o domínio de f .Afim de que f esteja definida precisamos que

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1,$$

logo o domínio da f é dado por

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Figura 1: Domínio da f .**(b)** (1,0) Determine e **desenhe** as curvas de nível de f .Para determinar as curvas de nível de f , queremos

$$1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} = c \Leftrightarrow 1 - c = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 = (1 - c)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - (1 - c)^2,$$

onde $0 \leq 1 - c \leq 1$, isto é, $0 \leq c \leq 1$. Logo, vemos que as curvas de nível são dadas por circunferências de raio $\sqrt{1 - (1 - c)^2}$, onde $0 \leq c \leq 1$, e isto no plano é dado pela Figura 2a.

(c) (1,0) Desenhe o **gráfico** de f .

Veja que

$$z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow z - 1 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow (z - 1)^2 = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1,$$

ou seja, é a esfera de raio 1 centrada no ponto $(0, 0, 1)$, mas olhando para a primeira equivalência acima vemos que é apenas a parte inferior da esfera, o qual é dado pela Figura 2b.

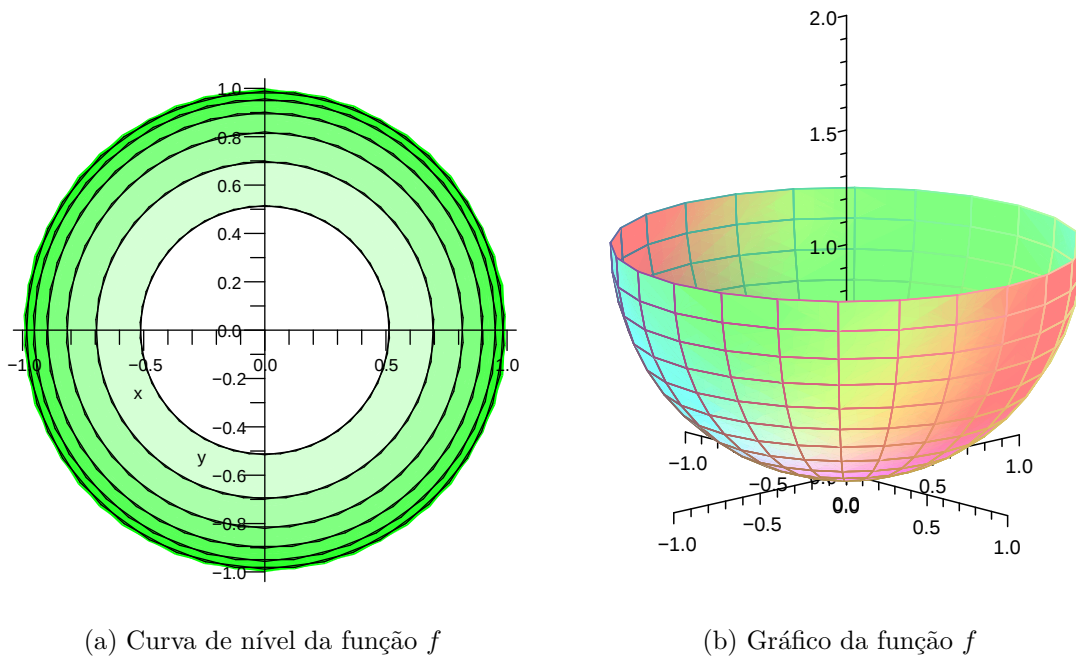


Figura 2

Questão 2 (2,5) Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) (1,0) Decida se f é contínua em $(0, 0)$.

Observemos que

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0).$$

Portanto, f é contínua em $(0, 0)$.

(b) (1,5) Decida se f é diferenciável em $(0, 0)$.

Por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 \cdot 0}{0^2 + y^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{0^2 y}{x^2 + 0^2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} E(h, k) &= f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k \\ &= \frac{h^2 k}{h^2 + k^2} \end{aligned}$$

e desta maneira

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{E(x, y)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k}{h^2 + k^2 \sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{h^2}{h^2 + k^2}}_{limitada} \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{limitada} \neq 0.$$

Portanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Questão 3 (1,0) Determine todos os planos tangentes a superfície $f(x, y) = 5 + 2x^2 + 3y^2$ que contenham o eixo Oy .

Suponhamos que a tangência ocorra no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Como tem que conter o eixo Oy , segue que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 6y_0 = 0$, ou seja, $y_0 = 0$. Logo, basta verificar a tangência sobre a curva $f(x, 0) = 5 + 2x^2$. Observe, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4x_0$. A reta que passa pelo ponto de tangência, $(x_0, 0, 5 + 2x_0^2)$ e a origem é dada por $z = 4x_0x$. Então, $4x_0^2 = 5 + 2x_0^2$, isto é, $y_0 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Portanto, os planos são dados por $z = \pm 2\sqrt{10}x$.

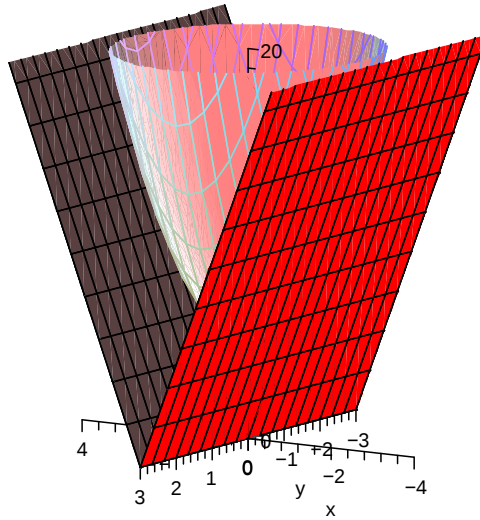


Figura 3: Trajetória dada pela curva em preto

Questão 4 (2,0) A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.

Veja, como γ está sobre $f(x, y)$, então podemos dizer que $z(t) = f(2t, t^2) \Rightarrow z'(t) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2t, t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2t, t^2)$, e desta forma,

$$\gamma'(t) = \left(2, 2t, 2\frac{\partial f}{\partial x}(2t, t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2t, t^2) \right) \Rightarrow \gamma'(1) = \left(2, 2, 2\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) \right) = (2, 2, 0).$$

Logo a reta é $(x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(2, 2, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Questão 5 (2,0) Suponha que o gráfico de $f(x, y) = 5 - x^2 - 4y^2$ represente a superfície de um monte. Um alpinista que se encontra na posição $(1, 1, 0)$ pretende escalá-lo. Determine a trajetória a ser descrita pelo alpinista admitindo que ele busque sempre a direção de maior aclave.

Veja que $\nabla f(x, y) = (-2x, -8y)$, assim a trajetória no plano xy que determinará a direção de maior aclave é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8y}{-2x} = \frac{4y}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{4y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln \sqrt[4]{y} = \ln x + k.$$

Como passa por $(1, 1)$, $\ln 1 = \ln 1 + k$, ou seja, $k = 0$. Então $y = x^4$.

Portanto, $\delta(t) = (t, t^4)$ é a trajetória no plano xy que determinará a direção de maior aclave, assim sobre a superfície¹ é

$$\gamma(t) = (t, t^4, f(t, t^4)) = (t, t^4, 5 - t^2 - 4t^8).$$

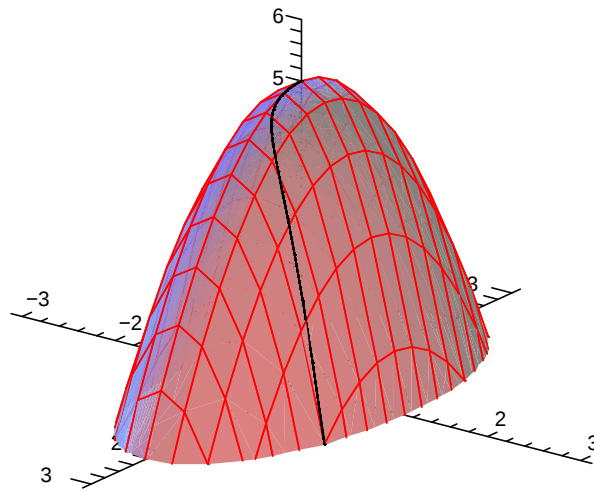


Figura 4: Trajetória dada pela curva em preto

BOA PROVA!

¹Aqui descrevemos o a situação geométrica, mas não havia a necessidade de fazê-la.