CÁLCULO PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS I (IME-USP)
PROVA 2

PROFESSOR: CRISTIÁN ORTIZ

Cada questão vale 2,5 pontos. Justifique suas respostas de forma detalhada e clara. Toda vez que usar algum resultado visto em aula ou nas listas, mencione de forma clara qual resultado você está usando. Boa prova!

(1) Considere a função de duas variáveis $f(x,y) = A + Bx^2 + Cy^2 + Dxy$, onde A, B, C, D são constantes tais que $4BC - D^2 > 0$. Prove que f possui um único ponto crítico. Indique quando este ponto crítico corresponde a um máximo local ou mínimo local. Responda a mesma pergunta para máximo global e mínimo global.

(2) Considere os seguintes pontos $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ em $\mathbb{R}^3$. Defina agora a função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} m_i \|x - e_i\|^2.$$

onde m_1, m_2, m_3 são constantes positivas. Encontre os pontos críticos de f e indique se estes pontos críticos correspondem a máximos locais (ou globais), mínimos locais (ou globais) ou pontos de sela.

(3) Considere o elipsoide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$. Verifique que $(0,0,c)$ é um ponto de S. É possível encontrar um plano tangente a S no ponto $(0,0,c)$? Justifique a sua resposta. Caso sua resposta seja afirmativa, exiba a equação do plano tangente a S no ponto $(0,0,c)$.

(4) Seja L um número real positivo. Dentre todos os triângulos de perímetro L, qual o de área máxima?

Dica: Lembre da Fórmula de Heron para calcular a área de um triângulo em função dos lados. Se x, y, z são os lados de um triângulo, então a área deste triângulo é $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ onde $s = \frac{x+y+z}{2}$ é o semi-perímetro.