

Segunda Prova - Resolução

Tuesday, December 8, 2020 7:28 AM



Segunda Prova - Resolução

Segunda Prova - Resolução

Sunday, December 6, 2020 12:45 PM



P2 MAT2352 mnvpr

- Q1) Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$. PQ $\begin{cases} P_x = y \\ P_y = x \\ Q_x = 0 \\ Q_y = 1 \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{max} \\ \text{cont} \\ \text{nul} \end{array} \right\}$ *
- a) Prove que o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de qualquer circunferência com centro no eixo das ordenadas é nulo.
- b) Prove que $\vec{F}$ não é campo conservativo.
- c) Exiba curva β , fechada, no $\mathbb{R}^2$, tal que o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de β não é nulo.

a) Se C uma circunferência com centro no ponto $(0, b)$ e raio $a, a > 0$ (b e a quaisquer)
 $C: x^2 + (y-b)^2 = a^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{a}\right)^2 = 1$.

1º jeito Uma parametrização para C é
 $\gamma(t) = (a \cos t, b + a \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$. O trabalho reali-
 zado por $\vec{F}$ ao longo de C é
 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (a \cos t (b + a \sin t), b + a \sin t) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt$
 $= \int_0^{2\pi} (ab \cos t \sin t - a^2 \sin^2 t \cos t + ab \cos t + a^2 \sin t \cos t) dt = a^2 (1-b) \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi}$
 $- \frac{\sin^3 t}{3} \cdot a^3 \Big|_0^{2\pi} + \sin t \cdot ab \Big|_0^{2\pi} = 0$ #

ou outro jeito $\vec{F}$ é $\mathcal{C}^0$ no $\mathbb{R}^2$, C é curva fechada simples e pelo teorema de Green,
 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D -x dx dy =$
 $D = \{(x, y) \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{a}\right)^2 \leq 1\}$ polares $\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^1 -(a \cos \theta) \cdot a d\theta da = a \cdot \frac{1}{3} (-\sin \theta) \Big|_0^{2\pi} = 0$
 $\Leftrightarrow \tilde{D} = \{(r, \theta) \mid r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}$

b) $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -x) \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$ não é conservativo.

c) Sobre qualquer curva cujo interior não seja simétrico em relação ao eixo Oy , o trabalho não será nulo.
 Ex.: β quadrado de lados $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$ (orientado em sentido anti-horário)
 $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, $\partial Q = \beta$ $\oint_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_Q (-x) dx dy = -\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot y \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \neq 0$

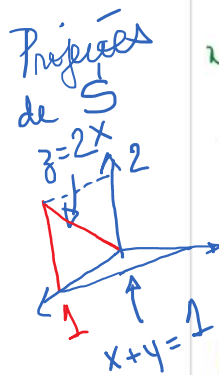
Q2) São dados três problemas nos itens I a III abaixo.

- I. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, 2y, z)$ através de S, em que S é a região triangular de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,2)$, orientada pela normal $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$.
- II. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (e^{yz}, e^{xz}, z + e^{xy})$ através de S, em que S é a fronteira da região dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e tal que $z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, orientada pela normal exterior.
- III. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (1, e^{xz}, e^{xy})$ através da parte do parabolóide $x = y^2 + z^2$, para $0 \leq x \leq 4$, orientada por campo normal $\vec{N}$ tal que $\vec{N}(0,0,0) = -\vec{i}$.

a) Para cada problema, faça um esboço da superfície, explique e justifique qual a sua estratégia para resolver e faça um esquema que resulte em integrais (simples, duplas ou triplas) resolvíveis, com atenção para:

- Provar que estão verificadas as hipóteses se for necessário usar um teorema;
- Justificar e indicar a orientação;
- Definir a(s) parametrização(ões) adequado(s) para chegar à solução efetiva do problema, conforme sua estratégia;
- Descrever o(s) domínio(s) de integração adequado(s) para chegar à solução efetiva do problema, conforme sua estratégia.

b) Resolva o item II.



S é parte do plano π pelos pontos $\begin{cases} A = (1,0,0) \\ B = (1,0,2) \\ C = (0,1,0) \end{cases}$
 S é superfície não fechada
 O campo $\vec{F}$ é contínuo e de fácil integração, então o item será resolvido por aplicação direta da definição de fluxo.
 Para tanto, devemos parametrizar S
 Temos: $\vec{AB} = (0,0,2)$ $\vec{AC} = (-1,1,0)$ e um normal ao plano π é $\vec{n}_\pi = \vec{AC} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 2, 0)$ $\vec{n}_\pi \cdot \vec{j} = 0$
 (I): $\langle (x, y, z) - (1, 0, 0), (2, 2, 0) \rangle = 0 \Rightarrow x - 1 + y = 0$ (3 eqs)
 (II) é plano vertical e podemos fazer $x = u$ e $z = v$
 Uma parametrização pl (II) é $\sigma(u, v) = (u, 1 - u, v)$
 " " pl S é $\sigma(u, v) = (u, 1 - u, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2u$

Dal: o fluxo de $\vec{F}$ através de S é:

Dar: o fluxo de $\vec{F}$ através de S é:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2u} \vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v du dv = \int_0^1 \int_0^{2u} (1, 2-2u, v) \cdot (1, 1, 0) du dv$$

$\sigma_u \wedge \sigma_v = (1, 1, 0)$
 $F = (x+4, 2y, z)$

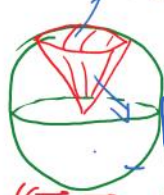
a) II) $\vec{F} = (e^{xz}, e^{xz}, z + e^{xy})$ e S é a fronteira da região B tal que $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{cases}$.

$\vec{F}$ tem derivadas parciais

$$\begin{cases} P_x = 0 & P_y = z e^{xz} & P_z = y e^{xz} \\ Q_x = z e^{xz} & Q_y = 0 & Q_z = x e^{xz} \\ R_x = y e^{xy} & R_y = x e^{xy} & R_z = 1 \end{cases}$$

todas contínuas $\therefore \vec{F} \in \mathcal{C}^1$ no $\mathbb{R}^3$ ①
mas max de ρ integral ②

Usaremos Gauss!

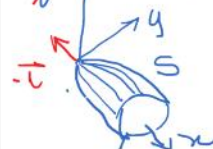


S é fechada orientada pela normal exterior
① e ②: estas satisfazem as hipóteses do Teorema de Gauss.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iiint_B \text{div } \vec{F} dxdydz = \iiint_B dxdydz$$

a) II) $\vec{F}(x, y, z) = (1, e^{xz}, e^{xy}) = (P, Q, R)$

S é a parte do parabolóide $x = y^2 + z^2$, $0 \leq x \leq 4$



S max é fechada, então max poderíamos aplicar Gauss. No entanto, por exemplo a segunda coordenada do campo sobre a superfície é $e^{xz} = e^{(y^2+z^2)z}$: e max é impossível calcular. Usamos Teor de Gauss.

Para usar o Teorema de Gauss vamos acrescentar a tampa plana: S_1 {disco $y^2 + z^2 \leq 4$ no plano $x=4$ orientado por $\vec{N}_1 = \vec{i}$. Assim $S \cup S_1$ é superfície fechada orientada pela normal exterior.
 $\vec{F}$ é campo de classe $\mathcal{C}^1$ pois as derivadas parciais são:

$$\begin{cases} P_x = P_y = P_z = 0 \\ Q_x = z e^{xz} & Q_y = 0 & Q_z = x e^{xz} \\ R_x = y e^{xy} & R_y = x e^{xy} & R_z = 1 \end{cases} \quad \text{todas contínuas}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x = T_y = T_z = 0 \\ Q_x = z e^{xz} \quad Q_y = 0 \quad Q_z = x e^{xz} \\ R_x = y e^{xy} \quad R_y = x e^{xy} \quad R_z = 0 \end{array} \right\} \text{ todas } \\ \text{contínuas.}$$

Pelo Teorema de Gauss, sendo $B = \left\{ (x, y, z) / \begin{array}{l} y^2 + z^2 \leq 4 \\ e \ y^2 + z^2 \leq x \leq 4 \end{array} \right\}$

$$\iint_{SUS_1} \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F} dxdydz = 0, \text{ pois } \operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 0.$$

Daí, o fluxo de $\vec{F}$ através de S é :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N}_1 d\sigma = \iint_D ((1, e^v, e^u) \cdot (1, 0, 0)) du dv$$

$S_1 = \sigma(D) \quad \sigma(u, v) = (4, u, v)$
 $D = \{(u, v) / u^2 + v^2 \leq 4\}$
 $\sigma_u \wedge \sigma_v = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_3$

b) Terminemos item II. Chegamos a

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iiint_B 1 dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta =$$

$= \frac{\rho^3}{3} \Big|_{\rho=0}^1 (-\cos \phi) \Big|_{\phi=0}^{\pi/6} \cdot \theta \Big|_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{1}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right] \cdot 2\pi$

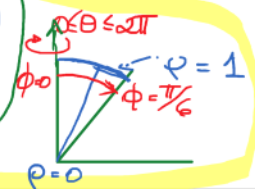
$B = \{(x, y, z) / \begin{array}{l} \text{interior à esfera} \\ z^2 + y^2 + x^2 \leq 1 \text{ e } z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{array}\}$

$0 \leq \rho \leq 1 \quad 0 \leq \phi \leq \pi/6 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Em esféricas: $\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$

$\rho \cos \phi = \sqrt{3} \rho \sin \phi \quad \Leftrightarrow \quad \tan \phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \pi/6$

$\rho \cos \phi \geq \sqrt{3} \rho \sin \phi \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \phi \leq \pi/6$



Q 3) São dados três problemas nos itens I a III abaixo.

- I. Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x, y, z) = (z, 2x + \cos(y^2), 5y)$ ao longo da curva γ obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o parabolóide $z = x^2 + y^2$, orientada de modo que sua projeção no plano xOy seja percorrida uma vez em sentido anti-horário.
- II. Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x, y, z) = (\sin(x^2) + z, 2x, 5y)$ ao longo da curva $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos 2t, \sin 2t + 2\cos 2t - 5)$, $0 \leq t \leq \pi$.
- III. Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} (x, y, z)$ ao longo da curva parametrizada $\gamma(t) = (e^{t^2}, t + 1, \sqrt[3]{t^2 + 1})$, $0 \leq t \leq 1$.

a) Para os problemas I e II, faça um esboço da curva e das superfícies que a contém; para cada um dos três problemas, explique e justifique qual a sua estratégia para resolver e faça um esquema que resulte em integrais (simples, duplas ou triplas) **resolvíveis**, com atenção para:

- Provar que estão verificadas as **hipóteses**, se for necessário usar um teorema;
- Justificar e indicar a **orientação**;
- Definir a(s) **parametrização(ões)** adequado(s) para chegar à solução efetiva do problema, conforme sua estratégia;
- Descrever o(s) **domínio(s) de integração** adequado(s) para chegar à solução efetiva do problema, conforme sua estratégia.

b) Resolva o item I.

aI) $\gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ sentido anti-horário

$\Rightarrow \text{Im} \gamma \subset \text{no plano } z = 4$.

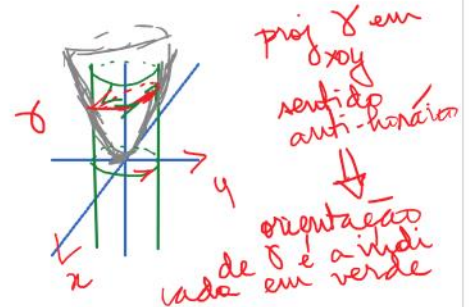
Não é possível calcular o trabalho

pela definição pois $\vec{F} = (z, 2x + \cos y^2, 5y) = (P, Q, R)$ e não há primitiva algébrica para a função $\cos y^2$.

Queremos usar teorema de Stokes e observamos que $\vec{F}$ é de classe C^1 pois suas derivadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x = 0 \quad P_y = 0 \quad P_z = 1 \\ Q_x = 2 \quad Q_y = -2y \sin y^2 \quad Q_z = 0 \\ R_x = 0 \quad R_y = 5 \quad R_z = 0 \end{array} \right\} \text{ são contínuas no } \mathbb{R}^3$$

Consideramos a superfície S dada pelo disco



$x^2 + y^2 \leq 4$ no plano $z = 4$, e temos que $\gamma = \partial S$,
 S orientada pela normal $\vec{N} = \vec{k}$, de modo
 que o caminhar, ao percorrer γ no
 sentido indicado (tal que $\text{proj}_{xOy} \gamma$ tenha sentido
 "anti-horário"), com a cabeça no sentido de
 $\vec{N} = \vec{k}$, tenha a superfície S à sua esquerda.

Daí, pelo teorema de Stokes:
 o trabalho de $\vec{F}$ ao longo de $\gamma = \partial S$ é:

$$\mathcal{C} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{N} \, d\sigma = \iint_D (5, 1, 2) \cdot (0, 0, 1) \, du \, dv$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 2x + \cos y & 5y \end{vmatrix} = (5, 1, 2)$$

$$\mathcal{C} = \iint_D 2 \, du \, dv$$

$$S: z = 4 \quad (u, v, 4)$$

$$D = \{ (u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 4 \}$$

a. II) $\vec{F}(x \sin^2 z + z, 2z, 5y) \in (P, R)$ { Não é possível calcular o trabalho pelo def pois P não tem primitiva algébrica. }

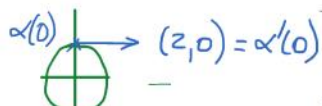
$$\gamma(t) = \left(\underbrace{\sin 2t}_{x(t)}, \underbrace{\cos 2t}_{y(t)}, \underbrace{\sin 2t + 2 \cos 2t - 5}_{z(t)} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \gamma(0) = (0, 1, -3) \\ \gamma(\pi) = (0, 1, -3) \end{array} \right\}$$

$\gamma(0) = \gamma(\pi) \Rightarrow \gamma$ é curva fechada

$$\gamma'(t) = (2 \cos 2t, -2 \sin 2t, 2(\cos 2t - 2 \sin 2t)) \Rightarrow \gamma'(0) = (2, 0, 4)$$

Note que $\begin{cases} x^2(t) + y^2(t) = 1 \\ z(t) = x(t) + 2y(t) - 5 \end{cases} \Rightarrow \text{Im } \gamma \text{ é interseção do cilindro } x^2 + y^2 = 1 \text{ com o plano } x + 2y - z - 5 = 0.$

$\alpha = \text{Proj}_{xOy} \gamma$
 é a circunf. de centro $(0, 0)$ e raio 1



percorrido em sentido horário



Estratégia: usar Stokes. Para tanto seja S a parte do plano Π limitada pelo cilindro.

no plano II limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Temos $\gamma = \partial S$ e para que a orientação de S seja compatível com a de γ devemos ter a normal $\vec{N}$ (como na figura, em vermelho) tal que $\vec{N} \cdot \vec{R} < 0$.

Para tanto: uma parametrização de S é

$$\sigma(u, v) = (v, u, 2v + u - 5) \quad \sigma_u \wedge \sigma_v = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$z = 2x + y - 5 \quad x = v \quad y = u$$

$$(u, v) \in D = \{(u, v) / u^2 + v^2 \leq 1\} \quad \sigma_u \wedge \sigma_v = (2, 1, -1)$$

Temos $F = \begin{pmatrix} \text{sen}^2 z \\ 2x \\ 5y \end{pmatrix}$ $\begin{cases} P_x = 2x \cos x^2 & P_y = 0 & P_z = 1 \\ Q_x = 2 & Q_y = 0 & Q_z = 0 \\ R_x = 0 & R_y = 5 & R_z = 0 \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \text{ tem derivadas parciais} \\ \text{contínuas pois as compo-} \\ \text{ntes são compostas de contí-} \\ \text{nua.} \end{array} \right.$

1. $\vec{F}$ é de classe C^1
 γ é fechada com orientação compatível com a de S conforme definido acima e podemos aplicar Stokes

$$\int_{\gamma=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{N} \, d\sigma = \iint_D (5, 1, 2) \cdot (2, 1, -1) \, du \, dv = \iint_D 9 \, du \, dv$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{sen}^2 z & 2x & 5y \end{vmatrix} = (5, 1, 2)$$

a. III) $\gamma(t) = (e^{t^2}, t+1, \sqrt[3]{t^2+1})$ $0 \leq t \leq 1$: é curva não fechada

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) \quad \text{Dom } \vec{F} = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} & y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} & z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} z(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2y - y(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2z \\ + x(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2z - z(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2x \\ + y(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2x - x(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2y \end{pmatrix} \vec{i}$$

$$+ (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2z - z(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2x) \vec{j} + (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2x - x(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2y) \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} \therefore \operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0} \\ \Omega = \operatorname{Dom} \vec{F} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \\ \text{e simplesmente} \\ \text{conexo} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{F} \text{ e' conservativo em } \Omega$$

$$\therefore \exists \psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad \nabla \psi = \vec{F}$$

$$\text{Então } \tau_0 = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \nabla \psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \psi(\gamma(1)) - \psi(\gamma(0))$$

$$= \psi(2, 2, \sqrt{2}) - \psi(1, 1, 1)$$

Obs.: Para provar que $\vec{F}$ e' conservativo, pode-se também calcular o potencial $\psi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Q3b) No item I: $\tau_0 = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D 2 \, du \, dv = 2 \operatorname{area}(D) = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 8\pi$

pois $D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 4\}$ e' disco de raio 2.

Q4) Calcule a massa da região contida entre o cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$ e o hiperbolóide de equação $x^2 + y^2 = 2 + z^2$, para $-1 \leq z \leq 2$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = y^2$.



A região B contida entre o cilindro e o hiperbolóide e' obtida por rotação da região plana (em verde, no plano xy) em torno do eixo Oz . Vamos descrevê-la em coordenadas

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 + z^2 \\ -1 \leq z \leq 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} r^2 = 1 \\ r^2 = 2 + z^2 \end{array}$$

cilíndricas $\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right.$

Tac $r = r$

$$\Leftrightarrow 1 \leq r \leq \sqrt{2 + z^2} \quad \therefore 1 \leq r \leq \sqrt{2 + z^2}$$

$$-1 \leq z \leq 2 \quad \wedge \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad B = \{0 \leq \theta \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 2\}$$

$$1 \leq z \leq 2$$

$$-1 \leq z \leq 2 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \tilde{B} = \left\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1 \leq z \leq \sqrt{2+z^2} \right\}$$

Sol: $M_{\text{mass}}(B) = \iiint_B \underbrace{\delta(2, y, z)}_{y^2} dxdydz = \iiint_{\tilde{B}} r^2 \sin\theta \, dr d\theta dz$

$$= \int_{-1}^2 \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2+z^2}} r^3 \sin\theta \, dr d\theta dz = \int_{-1}^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1-\cos\theta}{2} \cdot \frac{r^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2+z^2}} d\theta dz$$

$$= \int_{-1}^2 \left(\frac{1-\cos 2\pi}{4} - \frac{1-\cos 0}{4} \right) \frac{1}{4} \left[(2+z^2)^2 - 1 \right] dz = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^2 (3 + 4z^2 + z^4) dz =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(3z + 4 \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right) \Big|_{z=-1}^2 = \frac{\pi}{4} \left[3(2+1) + \frac{4}{3}(8+1) + \frac{1}{5}(32+1) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(21 + 33\frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{20} (105 + 33) = \frac{69\pi}{10} \quad \therefore M_{\text{mass}}(B) = \frac{69\pi}{10}$$