MAT2352 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis II – IME-USP

Segunda Prova – 5 e 6 de dezembro de 2020

Professora Cláudia Cueva Candido

QUESTÃO 1) Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (xy, y)$.

a) Prove que o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de qualquer circunferência com centro no eixo das ordenadas é nulo.
b) Prove que $\vec{F}$ não é campo conservativo.
c) Exiba curva β, fechada, no $\mathbb{R}^2$, tal que o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de β não é nulo.

QUESTÃO 2) São dados três problemas nos itens I a III abaixo.

I. Calcule o fluxo de $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x + y, 2y, z)$ através de S, em que S é a região triangular de vértices (1,0,0), (0,1,0) e (1,0,2), orientada pela normal $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$.

II. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (e^{yz}, e^{xz}, z + e^{xy})$ através de S, em que S é a fronteira da região dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e tal que $z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, orientada pela normal exterior.

III. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (1, e^{xz}, e^{xy})$ através da parte do paraboloide $x = y^2 + z^2$, para $0 \leq x \leq 4$, orientada por campo normal $\vec{N}$ tal que $\vec{N}(0,0,0) = -\vec{\imath}$.

a) Para cada um dos três problemas, faça um esboço da superfície, explique e justifique qual a sua estratégia para resolver e faça um esquema que resulte em integrais (simples, duplas ou triplas) **resolvíveis,** com atenção para:

▪ Provar que estão verificadas as **hipóteses,** se for necessário usar um teorema;
▪ Justificar e indicar a **orientação**;
▪ Definir a(s) **parametrização(ões)** adequada(s) para chegar à solução efetiva do problema, conforme sua estratégia;
▪ Descrever o(s) **domínio(s) de integração** adequado(s) para chegar à solução efetiva do problema, conforme sua estratégia.

b) Resolva o item II.

QUESTÃO 3) São dados três problemas nos itens I a III abaixo.

I. Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x,y,z) = (z, 2x + cos(y^2), 5y)$ ao longo da curva γ obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o paraboloide $z = x^2 + y^2$, orientada de modo que sua projeção no plano $x0y$ seja percorrida uma vez em sentido anti-horário.

II. Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x,y,z) = (sen(x^2) + z,\ 2x,\ 5y)$ ao longo da curva $\gamma(t) = (\text{sen}(2t)\ ,\ \cos(2t)\ ,\ \text{sen}(2t) + 2\cos(2\text{t}) - 5\ ), 0 \leq t \leq \pi$.

III. Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}(x, \text{y}, z)$ ao longo da curva parametrizada $\gamma(t) = \left(e^{t^2}\ ,\ t+1\ ,\ \sqrt[3]{t^2+1}\ \right), 0 \leq t \leq 1$.

a) Para os problemas I e II, faça um esboço da curva e das superfícies que a contém; para cada um dos três problemas, explique e justifique qual a sua estratégia para resolver e faça um esquema que resulte em integrais (simples, duplas ou triplas) **resolvíveis,** com atenção para:

▪ Provar que estão verificadas as **hipóteses,** se for necessário usar um teorema;
▪ Justificar e indicar a **orientação**;
▪ Definir a(s) **parametrização(ões)** adequada(s) para chegar à solução efetiva do problema, conforme sua estratégia;
▪ Descrever o(s) **domínio(s) de integração** adequado(s) para chegar à solução efetiva do problema, conforme sua estratégia.

b) Resolva o item I.

QUESTÃO 4) Calcule a massa da região contida entre o cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$ e o hiperboloide de equação $x^2 + y^2 = 2 + z^2$, para $-1 \leq z \leq 2$, sendo a densidade dada por $\delta(x,y,z) = y^2$.

– x – x –x – Fim da Prova – x – x –x –