MAT2352 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis II – IME-USP
Prova Substitutiva – 12 e 13 de dezembro de 2020
Professora Cláudia Cueva Candido

QUESTÃO 1) Decida se é Verdadeiro ou Falso. Prove suas afirmações!

a) O campo $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ é conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

b) O campo $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{-(y-1)}{4x^2+(y-1)^2}, \dfrac{x}{4x^2+(y-1)^2}\right)$ é conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$.

c) A área da região $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\right\}$ é $\dfrac{3\pi a^2}{4}$.

d) Para toda $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, contínua, $\displaystyle\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{1}^{4} \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx$.

e) Existe campo normal unitário contínuo definido na esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

QUESTÃO 2) Dados $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} + x, \frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}, \frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\right)$$

e $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, considere os problemas de cálculo de fluxo através de S nos casos em que:

I) S é a semiesfera de equação $x^2+y^2+z^2 = 1$ no semiespaço $x \geq 0$, orientada por campo normal $\vec{N}$, tal que $\vec{N} \cdot \vec{\imath} \leq 0$.

II) S é o elipsóide de equação $4x^2+2y^2+z^2 = 1$, orientado por campo normal exterior.

Nessas condições, pede-se:

a) Esboce as superfícies com indicação da orientação e explique sua estratégia para resolver os itens I e II (até obter integrais resolvíveis). Lembre de verificar as hipóteses dos teoremas que, eventualmente, você utilizar.

b) Resolva o item I.

c) Existe, em Ω, superfície S fechada, lisa por partes, tal que o fluxo de $\vec{F}$ através de S seja nulo? Prove sua afirmação.

QUESTÃO 3) Considere o campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(e^{x^2}, \frac{-z}{y^2+4z^2}, \frac{y}{y^2+4z^2}\right)$$

a) Calcule o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo da curva γ obtida como intersecção do parabolóide $y^2+z^2 = 1$ com a calha $x = \operatorname{sen}(y) + 10$, orientada de modo que sua projeção no plano yOz seja percorrida em sentido horário. (Esboce, explique, justifique, verifique as hipóteses, etc).

b) Existe no Dom $\vec{F}$ curva β fechada simples, lisa por partes, tal que $\int_\beta \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$? Justifique sua resposta.

– x – x –x – Fim da Prova – x – x –x –